Calculer l'argument d'un nombre complexe

On s'intéresse au calcul de l'argument d'un nombre complexe $\underline{z} = A + jB$ (avec $j^2 = -1$).

1 Définition

Tout nombre complexe $\underline{z}$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\underline{z} = |\underline{z}|\, e^{j\varphi}$$

- $|\underline{z}|$ est appelé le ***module*** de $\underline{z}$,
- φ est appelé ***l'argument*** du nombre complexe $\underline{z}$ ($\varphi = arg(\underline{z})$)

L'argument d'un nombre complexe est défini modulo 2π*. En général, on cherchera une valeur comprise dans l'intervalle* $[-\pi, \pi]$ *mais cela n'est pas obligatoire.*

2 Calcul d'un argument

Le calcul de φ commence par le raisonnement suivant :

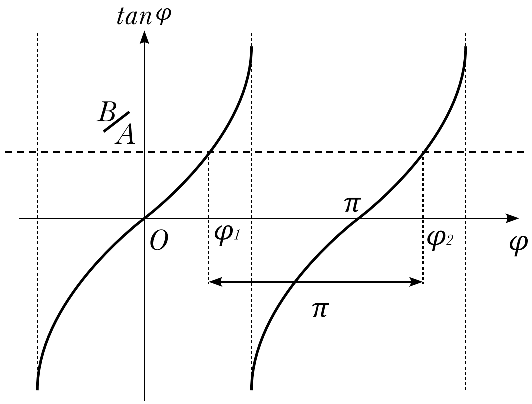
$$\underline{z} = |\underline{z}|\, e^{j\varphi} = |\underline{z}|\,(\cos\varphi + j\sin\varphi) = |\underline{z}|\cos\varphi + j\,|\underline{z}|\sin\varphi$$

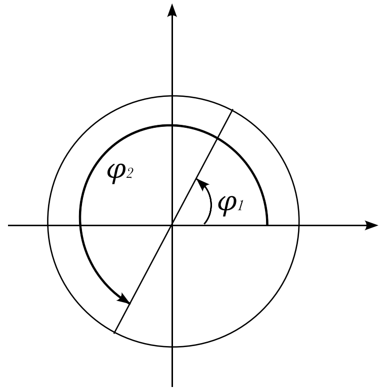
mais puisqu'on a également $\underline{z} = A + jB$, on en déduit par identification que $\mathcal{R}_e(\underline{z}) = A = |\underline{z}|\cos\varphi$ et $\mathcal{I}_m(\underline{z}) = B = |\underline{z}|\sin\varphi$, ou encore :

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad \sin\varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad \tan\varphi = \frac{B}{A}}$$

Les deux premières relations définissent sans ambigüité la valeur de φ (la troisième se déduit des deux premières). Pour déterminer exactement φ, on résout l'équation $\tan\varphi = B/A$. Cependant, cette équation possède deux solutions φ_1 et φ_2 sur un intervalle de largeur 2π ($\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ par exemple, voir le schéma ci-contre).

- La solution qui appartient à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est $\varphi_1 = \arctan\left(\frac{B}{A}\right)$. C'est la solution de l'équation qui est telle que $\cos\varphi_1 > 0$.
- La solution qui appartient à l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ est $\varphi_2 = \pi + \arctan\left(\frac{B}{A}\right)$. C'est la solution de l'équation qui est telle que $\cos\varphi_2 < 0$.





3 Bilan

Une fois remarqué que A et $\cos\varphi$ sont de même signe, on en déduit que :

Soit $\underline{z} = A + jB$ un nombre complexe quelconque, alors :

$$\text{si } A > 0 : \quad arg\,(\underline{z}) = \arctan\left(\frac{B}{A}\right) \quad [2\pi]$$

$$\text{si } A < 0 : \quad arg\,(\underline{z}) = \pi + \arctan\left(\frac{B}{A}\right) \quad [2\pi]$$

Remarque : si $A = 0$ alors $\underline{z}$ est un imaginaire pur et $\arg(\underline{z}) = \pm\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$ suivant le signe de B.

IMPORTANT : Lorsqu'on calcule la dépendance en ω de la phase à l'origine d'un signal sinusoïdal, il faut toujours respecter la règle suivante :

La phase à l'origine est ***toujours*** *une fonction continue de la pulsation.*

4 Propriétés de l'argument

- $arg\,(\underline{z_1}.\underline{z_2}) = arg\,(\underline{z_1}) + arg\,(\underline{z_2})$,
- $arg\left(\frac{\underline{z_1}}{\underline{z_2}}\right) = arg\,(\underline{z_1}) - arg\,(\underline{z_2})$,
- $arg\,(\underline{z}^n) = n.arg\,(\underline{z})$
- $arg\,(\underline{z}^*) = -arg\,(\underline{z}) \qquad$ ($\underline{z}^*$ est le conjugué de $\underline{z}$)