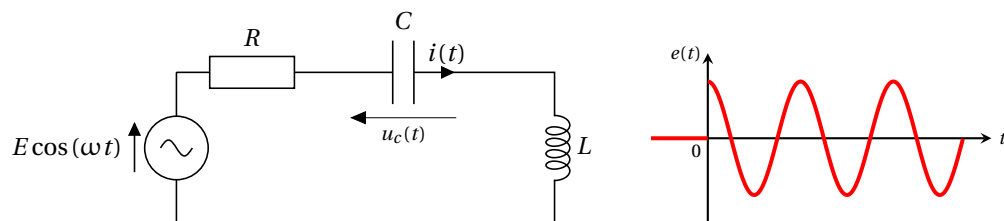


# Chapitre 15 : Oscillations forcées - Résonance

L'objectif de ce chapitre est de comprendre pourquoi certains systèmes physiques soumis à une excitation périodique ont un comportement qui dépend de la fréquence d'excitation. Sur l'exemple de systèmes linéaires mécaniques ou électriques, nous allons introduire les outils mathématiques qui permettent de décrire le comportement en régime permanent. Nous mettrons en évidence le phénomène de la résonance qui illustre parfaitement l'importance de la fréquence sur le comportement d'un système linéaire.

## 1 Équation d'évolution : oscillateur amorti soumis à une excitation sinusoïdale



Une circuit RLC série est alimenté à partir de  $t = 0$  par un générateur de fem sinusoïdale  $e(t) = E \cos(\omega t)$ . L'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur est la suivante :

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c = \omega_0^2 E \cos(\omega t)$$

La solution générale de cette équation différentielle s'écrit sous la forme  $u_c(t) = u_h(t) + u_p(t)$ .

- $u_h(t)$  est la solution générale de l'équation homogène, c'est-à-dire celle qui traduit le comportement de l'oscillateur amorti en **régime libre**.  $u_h(t)$  tend vers zéro quel que soient les conditions initiales. On note que cette fonction ne dépend pas de l'excitation.
- $u_p(t)$  est une solution particulière de l'équation différentielle ci-dessus. Cette fonction dépend de la manière dont le système est excité. C'est le seul terme qui subsiste quand  $t \rightarrow \infty$  puisque  $u_h(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ .

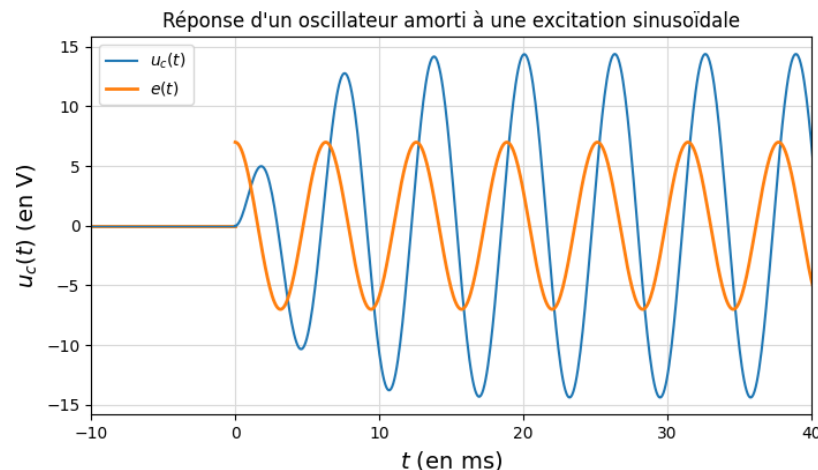
La réponse du système à une excitation extérieure est divisée en deux phases :

- d'abord un régime transitoire tant que  $u_h(t)$  n'est pas négligeable devant  $u_p(t)$  (le calcul de  $u_h(t)$  a été écrit au chapitre précédent) ;
- ensuite un régime permanent dans lequel l'évolution est décrite uniquement par la solution particulière de l'équation différentielle.

## 2 Réponse en régime permanent

### 2.1 Observations

On montre ci-dessous une simulation de la réponse du circuit après allumage du générateur.



Après une phase transitoire on observe un régime permanent dans lequel la tension  $u_c(t)$  oscille sinusoïdalement à la même pulsation que  $e(t)$ , mais avec une amplitude et une phase différente. On parle d'**oscillations forcées** (le régime permanent est appelé **régime sinusoïdal forcé**).

Tout système physique linéaire qui est soumis à une action sinusoïdale de pulsation  $\omega$  répond en oscillant exactement à la même pulsation  $\omega$ . En régime sinusoïdal forcé le comportement du système est décrit par une fonction sinusoïdale :

$$u_p(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$$

dont l'amplitude  $U_m$  et la phase à l'origine  $\varphi$  **dépendent de la pulsation d'excitation**  $\omega$ . Nous verrons dans la suite de ce chapitre comment déterminer  $U_m$  et  $\varphi$  puis nous étudierons la façon dont elles dépendent de  $\omega$ .

### 2.2 Notation complexe

À toute fonction sinusoïdale du temps  $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$  on associe une **représentation complexe**, notée  $\underline{s}(t)$ , définie par :

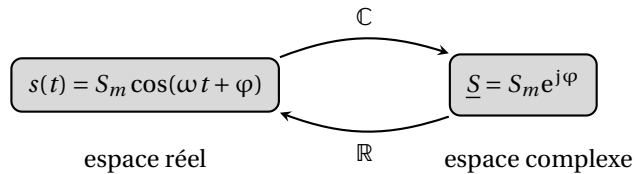
$$\underline{s}(t) = S_m e^{j(\omega t + \varphi)}$$

Où  $j^2 = -1$ . La fonction  $\underline{s}(t)$  est définie de sorte que  $s(t) = \text{Re}[\underline{s}(t)]$ .

La représentation complexe  $\underline{s}(t)$  peut également s'écrire sous la forme :

$$\underline{s}(t) = \underline{S}e^{j\omega t} \quad \text{avec} \quad \underline{S} = S_m e^{j\varphi}$$

où  $\underline{S}$  est appelée **l'amplitude complexe** de  $s(t)$ . Ainsi définie, il existe une unique amplitude complexe associée à une fonction sinusoïdale  $s(t)$  et inversement.



**À retenir :** connaissant l'amplitude complexe  $\underline{S}$  on retrouve l'expression de  $s(t)$  dans l'espace réel par un calcul de **module** et **d'argument**.

$$S_m = |\underline{S}|$$

$$\varphi = \arg(\underline{S})$$

## 2.3 Propriétés de la notation complexe

Toutes les opérations mathématiques **linéaires** (addition, soustraction, multiplication par une constante, dérivation temporelle, intégration temporelle, etc.) se conservent dans l'espace complexe.

On résume ces propriétés dans le tableau ci-dessous.

Espace réel	Espace complexe
$s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$	$\underline{S} = S_m e^{j\varphi}$
$\lambda s_1(t) + \mu s_2(t) , (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$	$\lambda \underline{S}_1 + \mu \underline{S}_2$
$\frac{ds}{dt}$	$j\omega \underline{S}$
$\frac{d^2s}{dt^2}$	$(j\omega)^2 \underline{S}$
$\int s(t) dt$	$\frac{\underline{S}}{j\omega}$

**Rq :** On retiendra en particulier les propriétés concernant la dérivation et l'intégration temporelle, que l'on réutilisera très souvent dans ce chapitre.

**Rq :** la multiplication n'est pas une opération linéaire donc elle n'est pas conservée dans l'espace complexe.

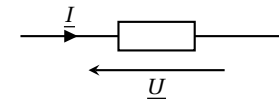
## 2.4 Avance de phase et notation complexe

Soient deux grandeurs sinusoïdales synchrones  $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi_x)$  et  $y(t) = Y_m \cos(\omega t + \varphi_y)$ . L'avance de phase de  $y(t)$  sur  $x(t)$  se calcule en complexe de la manière suivante :

$$\Delta\varphi_{y/x} = \varphi_y - \varphi_x = \arg\left(\frac{\underline{Y}}{\underline{X}}\right)$$

## 3 Dipôles linéaires en RSF

### 3.1 Impédance, admittance



En régime sinusoïdal forcé un dipôle linéaire est caractérisé par une relation entre la tension complexe  $\underline{U}$  et l'intensité complexe  $\underline{I}$  du type :

$$\underline{U} = a\underline{I} + b$$

Où  $a$  et  $b$  sont deux nombres complexes qui peuvent éventuellement dépendre de  $\omega$ .

Un dipôle linéaire **passif** est caractérisé par le fait que  $\underline{U}$  et  $\underline{I}$  sont proportionnelles l'une à l'autre ( $b = 0$ ). Dans ce cas, on définit l'impédance complexe  $\underline{Z}$  (en  $\Omega$ ) et l'admittance complexe  $\underline{Y}$  (en S) du dipôle passif par :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}}$$

**Rq :** La relation  $\underline{U} = \underline{Z}\underline{I}$ , valable **pour tout dipôle passif linéaire en RSF**, est appelée **loi d'Ohm complexe**.

L'impédance complexe contient deux informations :

- Elle permet de connaître le rapport entre les amplitudes de  $u(t)$  et  $i(t)$ .
- Elle permet de connaître le déphasage entre  $u(t)$  et  $i(t)$ .

En convention récepteur, en RSE, le courant qui traverse un dipôle et la tension à ses bornes s'écrivent sous la forme :

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) \quad \text{et} \quad i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$$

D'après la définition de l'impédance complexe, on a :

$$|\underline{Z}| = \frac{U_m}{I_m}$$

$$\arg(\underline{Z}) = \varphi_u - \varphi_i$$

### 3.2 Dipôles passifs usuels

On retient les expressions des impédances complexes des dipôles passifs usuels : la résistance, la bobine et le condensateur :

$$\underline{Z}_R = R$$

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$$

$$\underline{Z}_L = jL\omega$$

### 3.3 Lois de Kirchhoff

Tant que l'on reste dans le domaine de l'ARQS on a montré que les lois de Kirchhoff sont valables comme en régime stationnaire. Ceci s'étend à la notation complexe : **on peut appliquer la loi des mailles et la loi des nœuds dans l'espace complexe.**

### 3.4 Associations d'impédances

Les formules pour les associations d'impédances s'écrivent en notation complexe de manière semblable à ce que l'on a vu en régime stationnaire pour les résistors. On note que ces lois d'associations ne s'appliquent pas qu'aux seuls résistors mais s'étendent à **tous les dipôles linéaires passifs** (résistor, condensateur, bobine notamment).

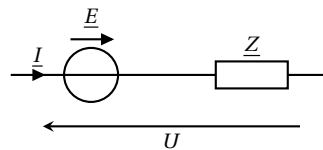
$$\underline{Z}_{\text{eq}} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \dots + \underline{Z}_N \quad \text{pour des impédances en série.}$$

$$\underline{Y}_{\text{eq}} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \dots + \underline{Y}_N \quad \text{pour des impédances en dérivation.}$$

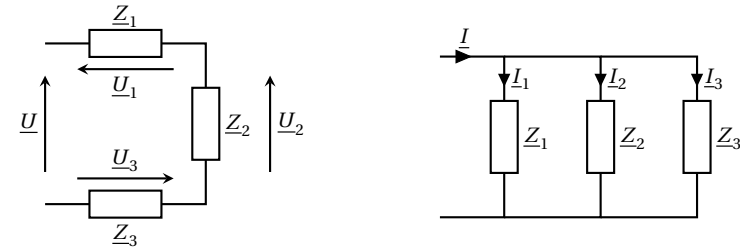
On retient également que pour **deux** impédances en dérivation :  $\underline{Y}_{\text{eq}} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 \iff \underline{Z}_{\text{eq}} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$

### 3.5 Dipôles actifs linéaires

Un dipôle linéaire **actif** est tel que  $\underline{U} = a\underline{I} + b$  avec  $b \neq 0$ . On peut le décrire avec un modèle de Thévenin (fem complexe  $\underline{E}$  en série avec une impédance  $\underline{Z}$ ).



### 3.6 Pont diviseur de tension/de courant



Loi du pont diviseur de tension (schéma de gauche, les impédances doivent être en **série**) :

$$\underline{U}_k = \frac{\underline{Z}_k}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \dots + \underline{Z}_N} \underline{U}$$

Loi du pont diviseur de courant (schéma de droite, les impédances doivent être en **dérivation**) :

$$\underline{I}_k = \frac{\underline{Y}_k}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \dots + \underline{Y}_N} \underline{I}$$

## 4 Résonance en tension (en élongation)

Dans cette partie, on étudie le comportement en fréquence du courant qui traverse un circuit RLC série ainsi que de la tension aux bornes du condensateur. Ces grandeurs sont notées sous la forme :  $u_c(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$  et  $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$ .

### 4.1 Amplitude complexe

Tout l'intérêt de la méthode complexe vient de ce qu'elle permet de transformer une équation différentielle en une équation algébrique. Ainsi il est très facile d'obtenir l'expression de la tension complexe aux bornes du condensateur :

$$\underline{U}_c = \frac{E}{1 + \frac{j\omega}{Q\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

La tension complexe dépend de  $\omega$  ce qui traduit le fait que les oscillations forcées du circuit dépendent de la pulsation d'excitation.

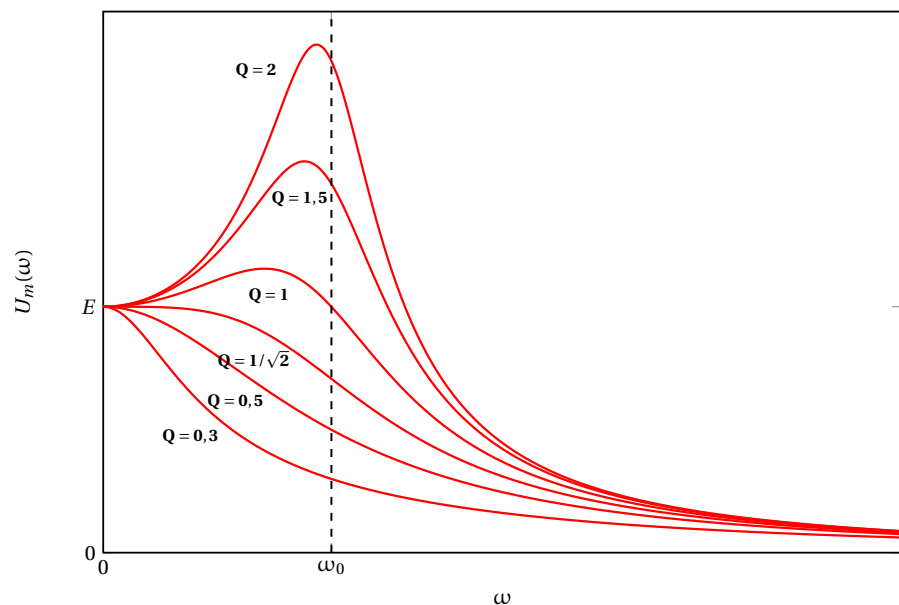
On parle de **résonance en amplitude** si l'amplitude des oscillations  $U_m(\omega)$  possède un **maximum local** sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ .

## 4.2 Étude de l'amplitude

Le module de  $\underline{U}_c$  permet de déterminer l'amplitude des oscillations :

$$U_m(\omega) = \frac{E}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}$$

On représente sur le graphique ci-dessous les variations de  $U_m(\omega)$  pour différentes valeurs du facteur de qualité (à  $\omega_0$  constant) :



- Pour  $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$  (frottements “forts”), l'amplitude est maximale quand  $\omega \rightarrow 0$ . L'amplitude des oscillations diminue de façon monotone avec  $\omega$  et devient quasi-nulle lorsque  $\omega \gg \omega_0$  (excitation très rapide devant la pulsation propre de l'oscillateur). **Il n'y a pas de résonance en amplitude.**
- Pour  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$  (frottements “faibles”), **il y a résonance en amplitude** à la pulsation :

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

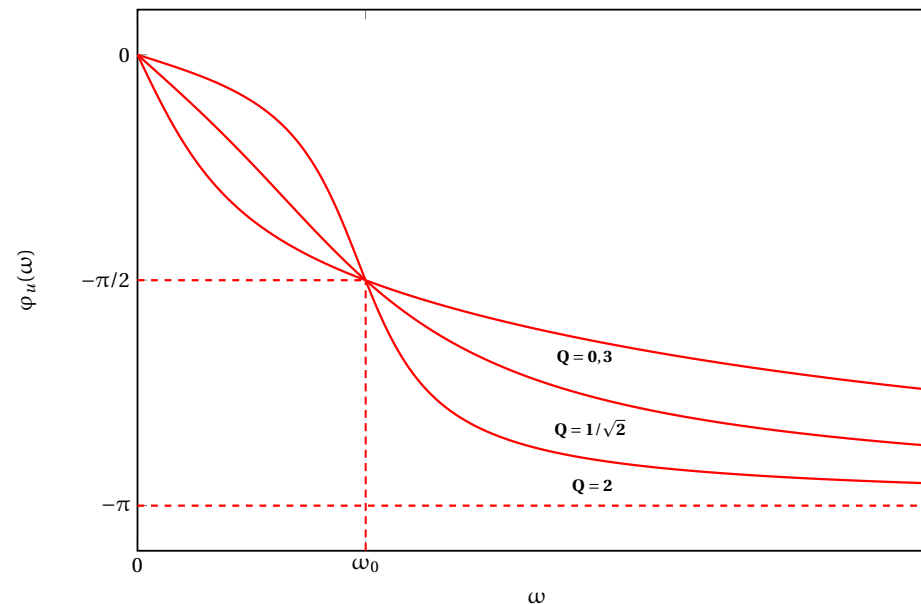
Plus les frottements sont faibles et plus la résonance est aiguë (forte amplitude, faible largeur en fréquence). En l'absence de frottement, la résonance deviendrait infinie, à la pulsation  $\omega_0$ .

## 4.3 Étude de la phase

L'argument de  $\underline{U}$  permet de déterminer la phase à l'origine de  $u(t)$  :

$$\varphi_u(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{Q\omega_0\omega}\right)$$

On représente sur le graphique ci-dessous les variations de  $\varphi_u(\omega)$  pour différentes valeurs du facteur de qualité (à  $\omega_0$  constant) :



- Pour une excitation lente devant  $\omega_0$ , l'oscillateur est quasiment en phase avec l'excitateur.
- Pour une excitation à la pulsation propre de l'oscillateur, celui-ci est en quadrature de phase avec l'excitateur.
- Pour une excitation très rapide devant  $\omega_0$ , l'oscillateur est quasiment en opposition de phase avec l'excitateur.

## 4.4 Exploiter des courbes d'amplitude et de phase en tension

L'étude conjointe des graphes d'amplitude et de phase permet d'obtenir rapidement les valeurs des paramètres canoniques de l'oscillateur amorti. En effet, on montre rapidement que :

$$\varphi_u(\omega_0) = -\frac{\pi}{2}, \quad U_m(0) = E \quad \text{et} \quad U_m(\omega_0) = QE$$

## 5 Résonance en intensité (en vitesse)

### 5.1 Amplitude complexe

En utilisant une loi des mailles, on peut exprimer l'amplitude complexe de l'intensité sous la forme :

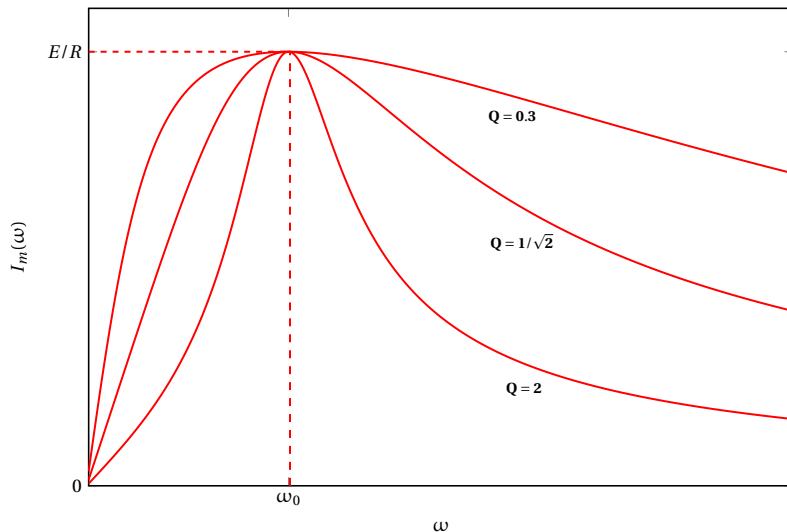
$$\underline{I} = \frac{E/R}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

### 5.2 Étude de l'amplitude

Le module de  $I$  permet de déterminer l'amplitude des oscillations de  $i(t)$  :

$$I_m(\omega) = \frac{E/R}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$$

On représente sur le graphique ci-dessous les variations de  $I_m(\omega)$  pour différentes valeurs du facteur de qualité (à  $\omega_0$  constant) :

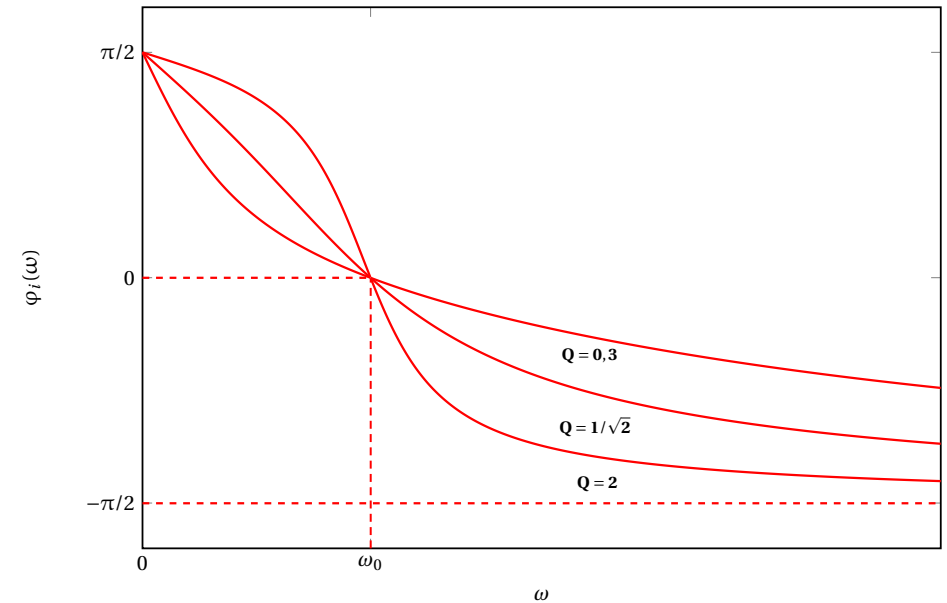


Il y a résonance en intensité quelque soit la valeur du facteur de qualité, toujours à la pulsation  $\omega_0$ .

### 5.3 Étude de la phase

Connaissant la phase à l'origine de la tension, on peut déterminer immédiatement celle de l'intensité puisque  $\varphi_i = \varphi_u + \pi/2$ .

On représente sur le graphique ci-dessous les variations de  $\varphi_i(\omega)$  pour différentes valeurs du facteur de qualité (à  $\omega_0$  et  $R$  constants) :



### 5.4 Bande passante de la résonance en intensité

Def : Notons  $I_{\max}$  l'amplitude de l'intensité à la résonance. On définit une **pulsation de coupure**  $\omega_c$  par :

$$I_m(\omega_c) = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$$

Dans le cas d'une résonance en intensité il y a typiquement deux pulsations de coupure  $\omega_1$  et  $\omega_2$  autour de la pulsation de résonance et on définit la **bande passante** de la résonance par l'intervalle  $[\omega_1, \omega_2]$ .

On peut montrer que la largeur de la bande passante est inversement proportionnelle au facteur de qualité :

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$$

Ainsi, **plus le facteur de qualité est grand et plus la résonance est aiguë.**

## 5.5 Exploiter des courbes d'amplitude et de phase en intensité

### 5.5.1 Courbe d'amplitude

La courbe d'amplitude à elle seule permet d'obtenir toutes les informations sur l'oscillateur amorti. En effet, on lit immédiatement sur la courbe les valeurs de  $\omega_0$  (pulsation de résonance) et  $\Delta\omega$ , ce qui permet d'en déduire la valeur du facteur de qualité.

### 5.5.2 Courbe de phase

La courbe de phase à elle seule permet également de déterminer les paramètres canoniques de l'oscillateur. En effet, on peut montrer que :

$$\varphi_i(\omega_0) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi_i(\omega_{1,2}) = \pm \frac{\pi}{4}$$