Corrigé DS4

Exercice 1 : QCM ondes

1. Réponse **C)**.

2. Réponse **B)**. L'onde se propage sans dispersion ni atténuation, avec une célérité vers les x croissants donc :

$$p(x_{\mathrm{M}} t) = p\left(0, t - \frac{x_{\mathrm{M}}}{c}\right) = p_m \cos\left(\omega\left(t - \frac{x_{\mathrm{M}}}{c}\right)\right) \iff \boxed{p(x_{\mathrm{M}}, t) = p_m \cos(\omega t - k x_{\mathrm{M}})}$$

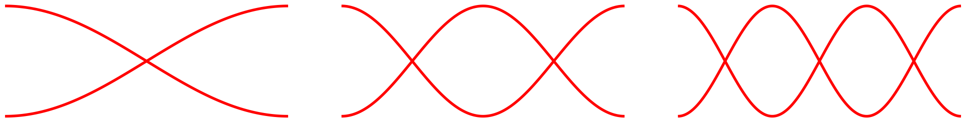
3. Réponse **D)**. Les deux signaux sont en phase si le haut-parleur et le microphones sont distants d'un nombre entiers de longueurs d'onde.

4. Réponse **C)**. D'après l'énoncé : $4\lambda = D \iff \lambda = \frac{D}{4} = 28{,}5\,\mathrm{cm} \iff \boxed{c = \lambda f = 342\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}}$.

5. Réponse **C)**.

6. Réponse **D)**. Si $x = 0$ est un ventre de vibration alors $\sin(\psi) = \pm 1 \iff \psi = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

7. Réponse **A)**.



Les graphes ci-dessus représentent les trois premiers modes propres. On voit que dans chacun des cas : $L = n\frac{\lambda}{2}$ où n est en entier non nul. On en déduit que $\lambda_n = \frac{2L}{n}$ et $f_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{nc}{2L}$.

8. Réponse **B)**. S'il y a un ventre de vibration au centre ainsi que sur les bords cela signifie que $L/2$ correspond à un nombre entier de fuseaux, soit :

$$\frac{L}{2} p \frac{\lambda}{2},\ p \in \mathbb{N}^* \iff \lambda = \frac{L}{p} \iff f = p\frac{c}{L} = 2pf_1$$

La fréquence de vibration est nécessairement un multiple pair de la fréquence fondamentale.

9. Réponse **B)**. S'il y a dix-septs ventre cela revient à dire qu'il y a seize fuseaux, soit $n = 16$. On a donc :

$$f = n\frac{c}{2L} \iff \boxed{L = n\frac{c}{2f} = 2{,}28\,\mathrm{m}}$$

10. Réponse **A)**. Le microphone est à égale distance des deux haut-parleurs donc il n'y a pas de déphasage dû à la propagation. Il n'y a pas non plus de déphasage initial car les haut-parleurs émettent des ondes en phase. Par conséquent les deux ondes arrivent en phase au point M, les interférences sont constructives.

11. Réponse **D)**. L'utilisation de la soufflerie modifie la célérité des ondes mais pas leur fréquence (la fréquence serait modifiée uniquement si le microphone et les haut-parleurs étaient en mouvement les uns par rapport aux autres, par **effet Doppler**). Par conséquent la vibration résultante en M est la somme de deux sinusoïdes de fréquence f ; il s'agit également d'une sinusoïde de fréquence f.

12. Réponse **D)**. On calcule le décalage temporel entre les ondes qui se superposent en M. Tandis que l'un parcourt la distance $L/2$ avec une célérité $c + v$, l'autre parcourt la même distance avec la célérité $c - v$:

$$\Delta t = \frac{\frac{L}{2}}{c - v} - \frac{\frac{L}{2}}{c + v} = \frac{L}{2}\frac{2v}{c^2 - v^2} \simeq \frac{Lv}{c^2}$$

On déterminer l'ordre d'interférence :

$$p = \frac{\Delta t}{T} = \frac{c\Delta t}{\lambda} = \frac{Lv}{\lambda c}$$

L'amplitude de vibration est nulle si les interférences sont destructives. Le plus petit ordre d'interférence possible qui correspond est $p = \frac{1}{2}$, soit :

$$\frac{Lv_{\min}}{\lambda c} = \frac{1}{2} \iff \boxed{v_{\min} = \frac{\lambda c}{2L} = 21\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}}$$

Exercice 2 : Fonctionnement d'un cyclotron

1. Les proton sont de charge positive, ils sont accélérés vers les potentiels les plus faibles. Par conséquent, il faut que $V > 0$.

2. On utilise la conservation de l'énergie mécanique :

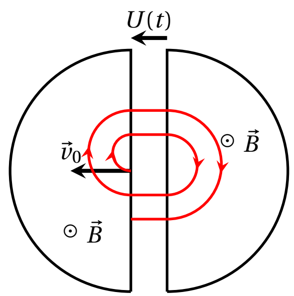
$$eV_{\mathrm{C}} = eV_{\mathrm{D}} + E_c(\mathrm{D}) \iff E_c(\mathrm{D}) = e(V_{\mathrm{C}} - V_{\mathrm{D}}) = EV \iff \boxed{V = \frac{E_c(\mathrm{D})}{e} = 40\,\mathrm{kV}}$$

3. $B_{\mathrm{terr}} \sim 5 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{T}$. Ce champ est bien inférieur à celui produit dans les dees. On peut le négliger.

4. À l'entrée du cyclotron, $E_c = 40\,\mathrm{keV}$ et $\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = 2{,}8 \cdot 10^6\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}}$.

La force magnétique, en norme, vaut $\|\vec{F}_{\mathrm{mag}}\| = \|e\vec{v}_0 \wedge \vec{B}\| = ev_0 B \sim 8 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{N}$. On compare avec le poids du proton $P = 1{,}67 \cdot 10^{-27} \times 10 \sim 10^{-26}\,\mathrm{N}$. Le poids est négligeable devant la force magnétique.

5. Pour déterminer le sens de rotation, calculons la force magnétique initiale : $\vec{F}_{\mathrm{mag}} = e\vec{v}_0 \wedge \vec{B}$. Cette force est dirigée vers le haut. Par conséquent, les protons tournent **dans le sens horaire**.



Les protons doivent être accélérés à chaque fois qu'ils passent dans le champ électrique entre les dees. Pour cela, ce champ $\vec{E}$ doit changer de sens à chaque demi-tour, ce qui signifie que sa pulsation doit être égale à la **pulsation cyclotron** $\omega_c = \frac{eB}{m}$ (voir cours). On en déduit la fréquence du champ électrique :

$$\boxed{f = \frac{eB}{2\pi m} = 2,7 \cdot 10^7\,\text{Hz}}$$

6. Dans les dees, la force magnétique ne travaille pas donc elle ne contribue pas à modifier l'énergie cinétique. À chaque passage entre les dees, on détermine l'augmentation d'énergie cinétique par conservation de l'énergie mécanique :

$$\Delta E_c = -\Delta E_p = -e\Delta V = eU_m$$

Puisque chaque proton passe deux fois entre les dees à chaque révolution, le gain d'énergie cinétique vaut :

$$\boxed{\Delta E_c = 2eU_m}$$

On note respectivement $E_{c,0} = 40\,\text{keV}$ et $E_{c,\max} = 70\,\text{MeV}$ l'énergie cinétique à l'entrée et à la sortie du cyclotron. Le nombre total de tours effectués vaut :

$$\boxed{N = \frac{E_{c,\max} - E_{c,0}}{2eU_m} = 538\,\text{tours}}$$

La période de rotation des protons ne dépend pas de leur énergie cinétique. Elle vaut $T = \frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{2\pi m}{eB}$ et la durée du passage des protons dans le cyclotron vaut :

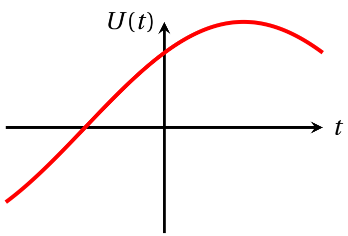
$$\boxed{\Delta t = N \times \frac{2\pi m}{eB} = 21\,\mu\text{s}}$$

7. Lorsqu'ils ont atteint leur énergie cinétique maximale, la vitesse des protons vaut $v_{\max} = \sqrt{\frac{2E_{c,\max}}{m}} = 1,2.10^8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ et le diamètre de la trajectoire vaut :

$$\boxed{D = 2R = \frac{2mv_{\max}}{eB} = 1,4\,\text{m}}$$

8. Lorsque les protons passent entre les dees, la tension accélératrice vaut $U = \pm U_m \sin\frac{\pi}{4} = \pm\frac{U_m}{\sqrt{2}}$. On reprend les calculs précédents et on obtient :

$$N = \sqrt{2}\frac{E_{c,\max} - E_{c,0}}{2eU_m} = 761\,\text{tours} \iff \boxed{\Delta t = N \times \frac{2\pi m}{eB} = 29\,\mu\text{s}}$$



Le graphe ci-dessus représente les variations de $U(t)$. Une particule qui passe entre les dees pour $t \lesssim 0$ (un peu en avance sur celles qui arrivent en $t = 0$) voit une tension moins forte que celle qui arrive en $t = 0$,elle sera moins accélérée. À l'inverse, une particule qui passe entre les dees pour $t \gtrsim 0$ (un peu en retard sur celles qui arrivent en $t = 0$) voit une tension plus forte que celle qui arrive en $t = 0$, elle sera davantage accélérée. Cet effet fait se regrouper les particules en paquets, les particules les plus en retard "rattrapant" celles qui sont en avance.

Exercice 3 : Anneau lancé sur un rail

1. L'anneau est soumis à son poids, qui est conservatif, et à la réaction normale du rail qui ne travaille pas car elle est toujours orthogonale au mouvement. D'après le théorème de la puissance mécanique appliqué à l'anneau dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0$$

Par conséquent, l'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement.

2. L'énergie potentielle de pesanteur vaut $\boxed{E_\text{p}(z) = mgz}$ (axe vertical ascendant).

3. On écrit la conservation de l'énergie mécanique entre le point O et un point A quelconque sur le rail :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgz \iff \boxed{v = \sqrt{v_0^2 - 2gz}}$$

4. À l'altitude H, on obtient une vitesse $\boxed{v(H) = \sqrt{v_0^2 - 2gH}}$. Cette vitesse n'est définie que si $v_0^2 - 2gH \geq 0$. Cela signifie que la masse ne franchit la bosse que si :

$$\boxed{v_0 > v_{\min} = \sqrt{2gH}}$$

5. Dans le cas où l'anneau franchit la bosse, son altitude vaut $z = H - h$ lorsqu'il atteint B. Sa vitesse vaut alors :

$$\boxed{v = \sqrt{v_0^2 - 2g(H-h)}}$$

Les AN donnent $\boxed{v_{\min} = 4,0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$ et $\boxed{v_\text{B} = 4,1\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$.

6. On applique à nouveau le théorème de la puissance mécanique :

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \mathscr{P}_\text{f}$$

Les frottements sont **résistants** donc $\mathscr{P}_\text{f} < 0$. La puissance des frottements est constante ce qui signifie que l'énergie mécanique décroît de manière **affine** avec le temps. Le graphe qui convient est le graphe $\boxed{\text{A)}}$.

7.a) Les trois brisures de pente sur le premier graphe ($v_0 = 5,5\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$) permettent de déterminer les abscisses recherchées :

$$\boxed{x_\text{g} = 0,4\,\text{m}} \quad , \quad \boxed{x_\text{s} = 1,2\,\text{m}} \quad \text{et} \quad \boxed{x_\text{d} = 1,6\,\text{m}}$$

7.b) Sur le graphe en haut à droite, la vitesse initiale est juste suffisante pour que l'anneau atteigne le point B (sa vitesse s'annule juste au moment où il y arrive). On lit en $x = 0$ la vitesse initiale

$\boxed{v_1 \simeq 5{,}1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$. Sur les autres graphes, on voit que si la vitesse initiale est inférieure à v_1, la masse n'arrive pas jusqu'en B.

7.c) Sur le graphe au milieu à gauche, la vitesse initiale est juste suffisante pour que l'anneau arrive au sommet de la bosse, en $x = 1{,}2\,\mathrm{m}$ (sa vitesse s'annule à cet endroit là). On lit en $x = 0$ la vitesse initiale $\boxed{v_2 = 5{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$.

7.d) Sur les deux graphes du dessous, on voit que l'anneau atteint la bosse si $v_0 = 3{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ mais pas si $v_0 = 2{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. On estime grossièrement que $\boxed{v_3 \simeq 2{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$.

7.e) Pour $v_0 = 5{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, on a vu que l'anneau s'arrête au sommet de la bosse. On applique le théorème de l'énergie mécanique entre O et le sommet S de la bosse :

$$\boxed{W(\vec{F}_\mathrm{f}) = E(\mathrm{S}) - E(\mathrm{O}) = mgH - \frac{1}{2}mv_0^2 = -0{,}47\,\mathrm{J}}$$

Puisque l'énergie mécanique décroît de façon affine avec le temps, on peut écrire que la durée Δt du mouvement vérifie :

$$E(\mathrm{S}) - E(\mathrm{O}) = \mathscr{P}_\mathrm{f}\Delta t \iff \boxed{\Delta t = \frac{W(\vec{F}_\mathrm{f})}{\mathscr{P}_\mathrm{f}} = 0{,}48\,\mathrm{s}}$$