Correction du DNS 15

EXERCICE 1

1) On a

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 \, dx = \frac{\pi}{4}$$

et

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = [-\ln(\cos x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2} \ln 2 + \ln 2 = \frac{\ln 2}{2}.$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+1} x \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^{n+1} x - \tan^n x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x (\tan x - 1) \, dx.$$

Or pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ on a $0 \leq \tan x \leq 1$, donc $\tan^n x (\tan x - 1) \leq 0$. Par conséquent $I_{n+1} - I_n \leq 0$: la suite (I_n) est décroissante.

De plus on a $I_n \geq 0$ pour tout n donc la suite (I_n) est minorée par 0. Elle est donc convergente.

3) a) On pose $x = \tan t$. Alors $t = \text{Arctan } x$ donc $dt = \frac{dx}{1+x^2}$, et donc $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} \, dx$.

b) Pour tout $x \in [0, 1]$, on a $1 \leq 1+x^2 \leq 2$, donc $\frac{x^n}{2} \leq \frac{x^n}{1+x^2} \leq x^n$, et donc

$$\frac{1}{2} \int_0^1 x^n \, dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} \, dx \leq \int_0^1 x^n \, dx.$$

Or $\int_0^1 x^n \, dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$, donc on obtient l'encadrement

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, donc par le théorème des gendarmes $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

4) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$I_n + I_{n+2} = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} \, dx + \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2} \, dx = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+2}}{1+x^2} \, dx = \int_0^1 \frac{x^n(1+x^2)}{1+x^2} \, dx = \int_0^1 x^n \, dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

b) On a $I_0 + I_2 = 1$ donc $I_2 = \frac{\pi}{4} - 1$, et $I_1 + I_3 = \frac{1}{2}$ donc $I_3 = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2}$.

D'autre part, en passant à la limite dans l'égalité $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$, on obtient $L + L = 0$, d'où $L = 0$.

5) a) On intègre par parties ($u(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $u'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, $v'(x) = x^n$, $v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$). On obtient

$$I_n = \left[\frac{1}{n+1} \frac{x^{n+1}}{1+x^2} \right]_0^1 + \frac{2}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)^2} \, dx = \frac{1}{2(n+1)} + \frac{2}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)^2} \, dx.$$

b) Pour tout $x \in [0, 1]$, on a $1 \leq (1+x^2)^2 \leq 4$, donc $\frac{x^{n+2}}{4} \leq \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)^2} \leq x^{n+2}$, et donc

$$\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{4} \, dx \leq \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)^2} \, dx \leq \int_0^1 x^{n+2} \, dx,$$

soit

$$\frac{1}{4(n+3)} \leq \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)^2} \, dx \leq \frac{1}{n+3}.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+3} = 0$, donc par le théorème des gendarmes $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)^2} \, dx = 0$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$nI_n = \frac{n}{2(n+1)} + \frac{2n}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)^2} dx.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n}{n+1} = 2$ donc d'après la question précédente

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n = \frac{1}{2}.$$

6) a) Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$ on a $\frac{1}{2k+1} = I_{2k+2} + I_{2k}$. Par conséquent

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} = \sum_{k=0}^n (-1)^k (I_{2k+2} + I_{2k}) = I_2 + I_0 - I_4 - I_2 + I_6 + I_4 - \dots + (-1)^n I_{2n+2} + (-1)^n I_{2n} = I_0 + (-1)^n I_{2n+2}.$$

b) On a vu que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{2n+2} = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = I_0 = \frac{\pi}{4}$.

c) Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ on a $\frac{1}{2k} = I_{2k+1} + I_{2k-1}$. Par conséquent

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{2k} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} (I_{2k+1} + I_{2k-1}) = I_3 + I_1 - I_5 - I_3 + I_7 + I_5 - \dots + (-1)^{n+1} I_{2n+1} + (-1)^{n+1} I_{2n-1} = I_1 + (-1)^{n+1} I_{2n+1}.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{2n+1} = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n = I_1 = \frac{\ln 2}{2}$.

EXERCICE 2

1) On trouve :

$$u_1 = 1,5 ; v_1 \approx 1,73 ; u_2 \approx 1,62 ; v_2 \approx 1,67 ; u_3 \approx 1,64 ; v_3 \approx 1,66.$$

On peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante, que la suite (v_n) est décroissante et que $v_n - u_n$ tend vers 0, autrement dit que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = u_{n+1}v_n - \frac{(u_n + v_n)^2}{4} = \frac{u_nv_n + v_n^2}{2} - \frac{u_n^2 + 2u_nv_n + v_n^2}{4} = \frac{v_n^2 - u_n^2}{4}.$$

Montrons maintenant par récurrence que $v_n^2 - u_n^2 = \frac{3}{4^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a $v_0^2 - u_0^2 = 3 = \frac{3}{4^0}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $v_n^2 - u_n^2 = \frac{3}{4^n}$. Alors

$$v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \frac{v_n^2 - u_n^2}{4} = \frac{3}{4^{n+1}}.$$

La récurrence est achevée.

b) Par récurrence immédiate on montre que les deux suites sont à valeurs positives.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $v_n^2 - u_n^2 = \frac{3}{4^n} \geq 0$, donc $v_n^2 \geq u_n^2$ et donc $v_n \geq u_n$ puisque u_n et v_n sont positifs.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} \geq 0$$

donc la suite (u_n) est croissante, et

$$v_{n+1}^2 - v_n^2 = u_{n+1}v_n - v_n^2 = \frac{u_nv_n + v_n^2}{2} - v_n^2 = \frac{u_nv_n - v_n^2}{2} = \frac{v_n(u_n - v_n)}{2} \leq 0$$

donc $v_{n+1}^2 \leq v_n^2$ et donc $v_{n+1} \leq v_n$: la suite (v_n) est décroissante.

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$0 \leq v_n - u_n = \frac{v_n^2 - u_n^2}{v_n + u_n} = \frac{3}{4^n(u_n + v_n)} \leq \frac{3}{2 \cdot 4^n}$$

car $u_n + v_n \geq 2u_n \geq 2u_0 = 2$. Par conséquent, d'après le théorème des gendarmes, $v_n - u_n$ tend vers 0.

De plus (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante, donc les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Elles convergent donc vers la même limite.

e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \leq \ell \leq v_n$. Il suffit de calculer les termes des deux suites jusqu'à ce que leur écart soit inférieur à 10^{-3} . On trouve que $u_5 \approx 1,6534$ et que $v_5 \approx 1,6543$ donc une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près est 1,654.

3) a) On raisonne par récurrence.

Pour $n = 1$: $p_1 = \cos \frac{\theta}{2}$ donc $p_1 \sin \frac{\theta}{2^1} = \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{2}$ car $\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$ (formule de duplication).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $p_n \sin \frac{\theta}{2^n} = \frac{\sin \theta}{2^n}$ et montrons que $p_{n+1} \sin \frac{\theta}{2^{n+1}} = \frac{\sin \theta}{2^{n+1}}$.

On a $p_{n+1} \sin \frac{\theta}{2^{n+1}} = p_n \cos \frac{\theta}{2^{n+1}} \sin \frac{\theta}{2^{n+1}}$. Or $\sin \frac{\theta}{2^n} = 2 \sin \frac{\theta}{2^{n+1}} \cos \frac{\theta}{2^{n+1}}$ (formule de duplication) donc $p_{n+1} \sin \frac{\theta}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} p_n \sin \frac{\theta}{2^n} = \frac{1}{2} \frac{\sin \theta}{2^n} = \frac{\sin \theta}{2^{n+1}}$.

Ainsi, d'après le théorème de récurrence, on a bien $p_n \sin \frac{\theta}{2^n} = \frac{\sin \theta}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Si $\theta = 0$ alors $p_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et donc p_n tend vers 1. Supposons $\theta \neq 0$. On peut écrire

$$2^n \sin \frac{\theta}{2^n} = \theta \frac{2^n}{\theta} \sin \frac{\theta}{2^n} = \theta \frac{\sin \frac{\theta}{2^n}}{\frac{\theta}{2^n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \theta$$

car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\theta}{2^n} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Si n est assez grand on a $\sin \frac{\theta}{2^n} \neq 0$ donc

$$p_n = \frac{\sin \theta}{2^n \sin \frac{\theta}{2^n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin \theta}{\theta}.$$

4) a) On raisonne par récurrence.

Pour $n = 0$ on a $4 \prod_{k=0}^0 \cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^k} = 4 \cos \frac{\pi}{3} = 2 = v_0$ et $v_0 \cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^0} = 1 = u_0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $v_n = 4 \prod_{k=0}^n \cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^k}$ et $u_n = v_n \cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}$. Alors :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{v_n \cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^n} + v_n}{2} = \frac{v_n \left(1 + \cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}\right)}{2} = v_n \cos^2 \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n+1}}$$

en utilisant la formule $\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$, donc

$$v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n} = \sqrt{v_n^2 \cos^2 \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n+1}}} = v_n \cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n+1}} = 4 \prod_{k=0}^{n+1} \cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^k}.$$

On voit alors qu'on a aussi $u_{n+1} = v_{n+1} \cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n+1}}$.

D'après le théorème de récurrence on a donc bien $v_n = 4 \prod_{k=0}^n \cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^k}$ et $u_n = v_n \cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) D'après 3)b) le produit $\prod_{k=1}^n \cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^k}$ tend vers $\frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$.

Par conséquent

$$v_n = 4 \cos \frac{\pi}{3} \prod_{k=1}^n \cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{3\sqrt{3}}{\pi}.$$