

Fiche d'exercices : Analyse asymptotique

Exercice 1 Déterminer, si elle existe, la limite en 0 de :

1. $\frac{x+x^2}{\sin x}$	5. $\frac{x+\ln x}{\sin x}$	9. $\frac{2\tan x - \sin 2x}{\sin^3 x}$
2. $\frac{1}{x} + \ln x$	6. $\frac{x \ln x}{\sin x}$	10. $\frac{x \ln x}{x^x - 1}$
3. $\frac{x + \operatorname{sh} x}{e^x \sin x}$	7. $\frac{\sin x \cdot \ln(1+x^2)}{x \tan x}$	11. $(1+x)^{x^2+\frac{3}{x}}$
4. $\frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+2)}$	8. $\frac{\sin 3x \cdot \sin 5x}{(x-x^3)^2}$	12. $\frac{x e^{\sin x}}{\ln x}$

Exercice 2 Déterminer, si elle existe, la limite en a de :

1. $\frac{e^x - e}{x^2 - 1} \quad (a=1)$	3. $\frac{\sin x}{x - \pi} \quad (a=\pi)$	5. $\tan x \cdot \tan 2x \quad (a=\frac{\pi}{2})$
2. $\frac{x^2 - 5x + 6}{\sin(\pi x)} \quad (a=2)$	4. $(\ln x)^{\ln x} \quad (a=1)$	6. $\frac{\sin x - \sin e}{\ln x - 1} \quad (a=e)$

Exercice 3 Déterminer, si elle existe, la limite en $+\infty$ de :

1. $\frac{x+1}{x-1}$	3. $x^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right)$	5. $\ln(\operatorname{ch} x) - x$
2. $\frac{x^3 + \sin x + e^{-x}}{x \ln x}$	4. $x \sin \frac{1}{x}$	6. $(x^2 + x + 1)^{\frac{1}{x}}$
		7. $\sqrt{x^2 - 2x} - \sqrt{x^2 + 4}$

Exercice 4 Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre demandé de :

1. $\cos(2x)$ (4)	8. $\frac{e^x - 1}{x} - \frac{2x}{1+x^2}$ (4)	13. $\ln(\cos x)$ (5)
2. $\cos(x^2)$ (4)	9. $\frac{\sin x}{\operatorname{sh} x}$ (5)	14. $\sin(\sin x)$ (6)
3. $\sqrt[3]{1-x}$ (3)	10. $\frac{1}{(1-x)^3}$ (3)	15. $(1+x)^x$ (4)
4. e^{2x+1} (3)	11. $\frac{x}{e^x - 1}$ (3)	16. $\left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{3}{x^2}}$ (2)
5. $\sqrt{1+x} \cdot \ln(1+x)$ (3)	12. $\ln(1+x+x^2)$ (4)	17. $(x+2)^{\sin x}$ (3)
6. $\sin^2 x$ (4)		
7. $\frac{1}{\operatorname{ch} x}$ (5)		

Exercice 5 Déterminer le développement limité à l'ordre n en a de :

$\ln x \quad (a=1, n=3) ; \quad \ln x \quad (a=2, n=3) ; \quad e^{2x} \quad (a=2, n=3) ; \quad \sqrt{1+x^2} \quad (a=1, n=4).$

Exercice 6 Déterminer le développement limité de la fonction Arcsin à l'ordre 6 en 0.

Exercice 7 Déterminer le développement limité de la fonction $F : x \mapsto \int_0^x \ln(\operatorname{ch} t) dt$ à l'ordre 5 en 0.

Exercice 8 Retrouver le développement limité de la fonction $\tan$ à l'ordre 6 en 0 :

- 1) En utilisant une équation différentielle dont $\tan$ est solution.
- 2) En utilisant le développement limité de Arctan.

Exercice 9 Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sh} x}{\sin^3 x}$	6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}$	11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x) - x}{\tan(\tan x) - x}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - e^x + x}{x + x^2}$	7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos \alpha x)}{\ln(\cos \beta x)}$	12. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{3}{x^2}}$
3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x + \ln x}{1 - \sqrt{2x - x^2}}$	8. $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x - 2) \tan \frac{\pi x}{2}$	13. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x \tan x - \frac{\pi}{2 \cos x} \right)$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cot^2 x - \frac{1}{x^2} \right)$	9. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$	14. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{e}{e^x - e} - \frac{1}{x - 1} \right)$
5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$	10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{1 - \cos 2x}$	15. $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(1 - x) \cos \frac{\pi x}{2}$

Exercice 10 Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 e^{\frac{1}{x}} - \sqrt[3]{x^6 + 3x^5 + x^4} \right)$	3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{Arccos}^2 x}{\ln x}$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x - e \cdot x \right)$	4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{\operatorname{Arctan}(1+x) - \operatorname{Arctan}(1-x)}$

Exercice 11 Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $x \in I$. Déterminer la limite de $\frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$ lorsque h tend vers 0.

Exercice 12 Montrer que la fonction f définie sur $] -1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ est prolongeable par continuité en 0, et que la fonction ainsi prolongée est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13 Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\operatorname{Arctan}^{(n)}(0)$.

Exercice 14 Étudier l'existence d'asymptotes à la courbe représentative de la fonction f et la position de la courbe par rapport à ses asymptotes au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ dans les cas suivants :

$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} ; \quad f(x) = \ln(\operatorname{ch} x) ; \quad f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^4 + x^3 + x^2}.$

Exercice 15 Déterminer un développement asymptotique à trois termes de th en $+\infty$.

Exercice 16 Déterminer un développement asymptotique à trois termes de la fonction réciproque de sh en $+\infty$.

Exercice 17 Déterminer un équivalent simple des suites de terme général :

$$\begin{array}{l|l|l|l} 1. \frac{2n^5 - 4n^2 + 3}{3n^2 - 8n + 7} & 4. \frac{e^n}{1 + e^n} - 1 & 7. \operatorname{ch} \frac{1}{n} - \cos \frac{1}{n} & 10. \frac{\operatorname{sh} n}{\operatorname{ch}^2 n} \\ 2. n^2 + 2^n & 5. \ln(n \ln n) & 8. \ln(n+1) - \ln n & 11. \left(\cos \frac{1}{n} \right)^n - 1 \\ 3. 2^n + 3^n & 6. 1 + 2 + \dots + n & 9. \sqrt{n+1} - \sqrt{n} & \end{array}$$

Exercice 18 Étudier la convergence des suites de terme général :

$$\begin{array}{l|l|l} 1. \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n} & 4. \sqrt{n^2 + n + 1} - n & 7. n^2 (\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}) \\ 2. \frac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n} & 5. \frac{n^2 + n \sin n + 1}{2 + \cos n} & 8. \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \\ 3. (-1)^n (2 + 3(-1)^n) & 6. \frac{|e^n - n!| + 2n^2 - 1}{3n^2 + \ln \sqrt{n^4 + n + 1}} & 9. n \left(\operatorname{Arctan} n - \frac{\pi}{2} \right) \end{array}$$

Exercice 19 On considère la suite $(H_n)_{n \geq 1}$ de terme général $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

- 1) Étudier la monotonie de (H_n) .
- 2) Établir, pour tout entier $n > 1$, l'encadrement $\ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n} \leq \ln n - \ln(n-1)$.
- 3) En déduire la nature de la suite (H_n) , et montrer que $H_n \sim \ln n$ au voisinage de $+\infty$.
- 4) Montrer que la suite de terme général $H_n - \ln n$ est convergente et donner un encadrement de sa limite.

Exercice 20 Soit p un entier naturel. Soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $S_n = \sum_{k=1}^n k^p$.

- 1) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a : $\int_{k-1}^k x^p dx \leq k^p \leq \int_k^{k+1} x^p dx$.
- 2) En déduire que $S_n \sim \frac{n^{p+1}}{p+1}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 21 On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $u_n = \frac{\sqrt{n}}{4^n} \binom{2n}{n}$.

- 1) Étudier la monotonie de (u_n) .
- 2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \sqrt{\frac{n}{2n+1}}$.
- 3) En déduire qu'il existe un réel C tel que $\binom{2n}{n} \sim C \frac{4^n}{\sqrt{n}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
- 4) Déterminer la valeur de C en utilisant la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$.

Exercice 22 Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_0^1 \frac{1}{(x^2 + x + 1)^n} dx$.

- 1) Établir, pour tout x de l'intervalle $[0, 1]$, l'encadrement $1 - x \leq \frac{1}{x^2 + x + 1} \leq \frac{1}{1 + x}$.
- 2) En déduire que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, calculer sa limite et donner un équivalent simple de I_n au voisinage de $+\infty$.

Exercice 23 Pour tout entier naturel n on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1 + x^n} dx$.

- 1) Étudier la monotonie et la convergence de la suite (I_n) .
- 2) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a $I_n = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1 + x^n) dx$.
- 3) En déduire un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$ (on utilisera l'inégalité $\ln(1 + x) \leq x$ valable pour tout $x > -1$).

Exercice 24

- 1) Montrer que, pour tout entier naturel n , l'équation $x + \ln x = n$ admet une solution unique, que l'on notera x_n .
- 2) Étudier la monotonie et la convergence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- 3) Montrer que $x_n \sim n$ au voisinage de $+\infty$.
- 4) Montrer que $x_n - n \sim \ln n$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 25

- 1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $\cos x = nx$ a une unique solution dans l'intervalle $[0, 1]$. On note x_n cette solution.
- 2) Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
- 3) Déterminer un équivalent de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.
- 4) Déterminer un équivalent de $x_n - \frac{1}{n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 26 On considère la suite d'intégrales $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $I_n = \int_0^1 (1 - x)^n e^{-x} dx$.

- 1) Étudier la monotonie de la suite (I_n) . Que peut-on en déduire ?
- 2) Déterminer la limite de la suite (I_n) en majorant e^{-x} pour tout x de $[0, 1]$.
- 3) Établir, pour tout entier naturel n , la relation $I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$.
- 4) En déduire que $I_n = \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$.