

Corrigé DS5

Exercice 1 : Microscope à force atomique en mode oscillant

1. On effectue une analyse dimensionnelle de la relation entre la flèche z et la force F_{ext} :

$$L = \frac{L^3}{[E] L^4} [F] \iff [E] = \frac{[F]}{L^2}$$

Le module d'Young est homogène à une force surfacique, autrement dit à une **pression**.

2. Notons $\vec{F}_{\text{rappel}}$ la contrainte qui agit sur le système levier-pointe lorsque celui-ci est déformé. En présence de la force $\vec{F}_{\text{ext}}$ le système atteint un état d'équilibre caractérisé par (première loi de Newton) :

$$\vec{F}_{\text{rappel}} + \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \iff \vec{F}_{\text{rappel}} = -\vec{F}_{\text{ext}} = -\frac{Eae^3}{4L^3} z \vec{e}_z$$

Cette force est semblable à la force de rappel exercée par un ressort élastique de longueur à vide nulle et

de raideur $k = \frac{Eae^3}{4L^3}$.

L'application numérique donne $k = 20 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$.

3. Le système levier-pointe est soumis à la force de rappel $\vec{F}_{\text{rappel}}$ dont on suppose que l'expression reste valable hors équilibre et à la force de frottement $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$. On applique le principe fondamental de la dynamique à la masse m équivalente dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen :

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\text{ext}} + \vec{f}$$

On projette sur $\vec{e}_z$:

$$\ddot{z} = -kz - \alpha \dot{z} \iff \ddot{z} + \frac{\alpha}{m} \dot{z} + \frac{k}{m} z = 0$$

Par identification on trouve $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$.

4. L'équation différentielle est homogène. L'hypothèse d'un amortissement faible revient à dire que $Q \gg 1$. On écrit l'équation caractéristique :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$$

Le discriminant vaut $\Delta = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4 \right) < 0$ et les deux racines sont :

$$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

Puisque $Q \gg 1$ on peut faire l'approximation suivante : $r_{1,2} \simeq -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0$. La solution de l'équation s'écrit sous la forme :

$$z(t) \simeq \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q} t\right) (A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t))$$

On détermine les constantes d'intégration A et B avec les conditions initiales $z(0) = z_0$ et $\dot{z}(0) = 0$ (pas de vitesse initiale) :

$$\begin{cases} A = z_0 \\ -\frac{\omega_0}{2Q} A + \omega_0 B = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = z_0 \\ B = \frac{z_0}{2Q} \end{cases}$$

On constate que $|B| \ll |A|$, on peut donc négliger le terme $B \sin(\omega_0 t)$. On conclut que :

$$z(t) \simeq z_0 \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q} t\right) \cos(\omega_0 t)$$

5. On reprend le principe fondamental de la dynamique projeté sur $\vec{e}_z$, en ajoutant cette fois-ci la force excitatrice :

$$m\ddot{z} = -kz - \alpha \dot{z} + F_m \cos(\omega t) \iff \ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z} + \omega_0^2 z = A \cos(\omega t)$$

6. On passe l'équation différentielle dans l'espace complexe :

$$\left(-\omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2\right) Z_0 = A \iff Z_0 = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q}}$$

On calcule le module de cette amplitude complexe :

$$|Z_0| = \left| \frac{\frac{A}{\omega_0^2}}{1 - x^2 + \frac{jx}{Q}} \right| \iff \frac{\frac{A}{\omega_0^2}}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$$

Par identification on trouve $Z_m = \frac{A}{\omega_0^2} = \frac{F_m}{k}$.

7. Le déplacement $z(t)$ du système entre en résonance si l'amplitude réelle des oscillations $|Z_0|(\omega)$ est maximale pour $\omega \in]0, +\infty[$, autrement dit si le dénominateur est minimal. On étudie les variations de la fonction $f : x \mapsto (1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}$.

$$f'(x) = 0 \iff 2(-2x)(1 - x^2) + \frac{2x}{Q^2} = 0$$

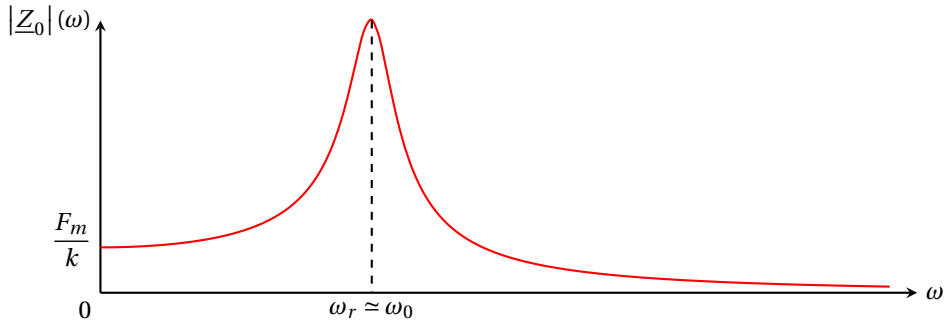
$$\iff 2x \left[2x^2 - 2 + \frac{1}{Q^2} \right] = 0$$

On exclut le cas $x = 0$. Il reste :

$$x^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2} \iff \omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

Cette pulsation de résonance est définie à condition que $1 - \frac{1}{2Q^2} > 0 \iff Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

8. Dans le cas d'un amortissement faible on a $\omega_r \simeq \omega_0$ et la résonance est aiguë.



9. On applique à nouveau le principe fondamental de la dynamique en ajoutant la force d'interaction entre le système et la surface :

$$m\ddot{z} = -kz - \alpha\dot{z} + F_m \cos(\omega t) + F_{\text{int}}(z_{\text{eq}}) + (z - z_{\text{eq}}) \left. \frac{dF_{\text{int}}}{dz} \right|_{z_{\text{eq}}}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z} + \left(\omega_0^2 - \frac{1}{m} \left. \frac{dF_{\text{int}}}{dz} \right|_{z_{\text{eq}}} \right) z = F_m \cos(\omega t) + F_{\text{int}}(z_{\text{eq}}) - z_{\text{eq}} \left. \frac{dF_{\text{int}}}{dz} \right|_{z_{\text{eq}}}$$

On identifie une nouvelle pulsation propre dans le membre de gauche :

$$\Omega_0^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{m} \left. \frac{dF_{\text{int}}}{dz} \right|_{z_{\text{eq}}} = \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{m\omega_0^2} \left. \frac{dF_{\text{int}}}{dz} \right|_{z_{\text{eq}}} \right)$$

Sachant que $k = m\omega_0^2$ on trouve finalement $\Omega_0 = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{k} \left. \frac{dF_{\text{int}}}{dz} \right|_{z_{\text{eq}}}}$.

10. D'après la figure 2 : $d(z) = d_0 - z$ donc :

$$F_{\text{int}}(z) = \frac{HR}{6(d_0 - z)^2} \Leftrightarrow \left. \frac{dF_{\text{int}}}{dz} \right|_{z_{\text{eq}}} = \frac{HR}{3(d_0 - z_{\text{eq}})^3}$$

11. Le résultat de la question 9 conduit à :

$$\frac{\Omega_0 - \omega_0}{\omega_0} = -1 + \sqrt{1 - \frac{1}{k} \left. \frac{dF_{\text{int}}}{dz} \right|_{z_{\text{eq}}}} \Leftrightarrow \frac{\Omega_0 - \omega_0}{\omega_0} = -1 + \sqrt{1 - \frac{HR}{3k(d_0 - z_{\text{eq}})^3}}$$

On prend $d_0 - z_{\text{eq}} = 10 \text{ nm}$ pour effectuer l'application numérique : $\frac{\Omega_0 - \omega_0}{\omega_0} = -1,2 \cdot 10^{-6}$. Le décalage relatif est négatif donc il se produit **vers les basses fréquences**.

Exercice 2 : Traitement d'un signal

1. Au vu du graphe de la figure 2, on peut estimer à **environ 10 mV** la valeur moyenne du signal.

2. On voit qu'un même motif se répète avec une période $T = 3,1 \text{ ms}$. Cela correspond à une fréquence **$f = 1/T = 3,2 \cdot 10^2 \text{ Hz}$** .

3. Au vu des valeurs données dans le tableau 1, on peut penser qu'il s'agit de la corde de **Mi aigu** (si elle est jouée à vide, c'est-à-dire sans être pincée).

4. Le signal enregistré par le microphone **n'est pas sinusoïdal**. Par conséquent, son spectre présentera forcément des harmoniques.

5. En BF, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert et la tension aux bornes de R est nulle car le courant est nul : $s(t) = 0$ en BF.

En HF, le condensateur est équivalent à un fil : $s(t) = e(t)$ en HF. Ce filtre atténue les basses fréquences et transmet les hautes fréquences, il s'agit d'un **passé-haut**.

6. On applique la loi du pont diviseur de tension :

$$\underline{H}_1 = \frac{R_1}{R_1 + \frac{1}{jC_1\omega}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{jR_1C_1\omega}}$$

On reconnaît la forme canonique d'un filtre passe-haut du premier ordre. On identifie la pulsation de coupure : **$\omega_1 = \frac{1}{R_1 C_1}$** .

7. La fréquence de coupure vaut $f_1 = \frac{1}{2\pi R_1 C_1} = 15,9 \text{ Hz}$. Elle est faible devant la fréquence fondamentale du signal enregistré. Par conséquent, la partie variable du signal est transmise sans atténuation ni déformation. En revanche, la composante continue est éliminée. **Ce filtre a pour rôle de supprimer la composante continue du signal.**

8. On rappelle que pour un ALI idéal en régime linéaire : $V_+ = V_-$ et $I_+ = I_- = 0$. On remarque qu'ici : $\underline{V}_+ = \underline{V}_- = \underline{E}$. On applique la loi des nœuds en termes de potentiels au niveau de l'entrée inverseuse :

$$\frac{-\underline{E}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{E} - \underline{S}}{\underline{Z}'}$$

Après simplification, on obtient l'expression de la fonction de transfert sous la forme :

$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = 1 + \frac{\underline{Z}'}{\underline{Z}}$$

9. Dans le cas où les deux impédances sont des résistances, on obtient :

$$\underline{H} = 1 + \frac{R'}{R}$$

Le montage est alors un **amplificateur non-inverseur**, son rôle consiste à **amplifier le signal**.

10. L'impédance équivalente vaut :

$$Z_{eq} = \frac{R_2}{1 + jR_2 C_2 \omega}$$

11. La fonction de transfert vaut :

$$\underline{H}_2 = 1 + \frac{Z_{eq}}{R_3} = 1 + \frac{R_2}{R_3(1 + jR_2 C_2 \omega)}$$

12. La fonction de transfert est déjà sous la forme attendue, avec :

$$G_0 = \frac{R_2}{R_3} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{1}{R_2 C_2}$$

13. En basse fréquence ($\omega \ll \omega_2$) : $\underline{H} \simeq 1 + G_0$. En haute fréquence ($\omega \gg \omega_2$) : $\underline{H} \simeq 1$.

14. Numériquement, on a :

$$f_2 = \frac{1}{2\pi R_2 C_2} = 498 \text{ Hz} \quad \text{et} \quad G_0 = 113$$

La fréquence caractéristique f_2 est comprise entre la fréquence fondamentale du signal enregistré par le microphone et celle de l'harmonique de rang 2. Par conséquent le gain est quasiment égal à G_0 pour le fondamental tandis qu'il décroît dès le premier harmonique pour tendre vers 1 en haute fréquence. **Ce filtre amplifie principalement la composante fondamentale du signal pour renforcer son poids dans le spectre par rapport aux harmoniques.**

15. L'entrée de ce filtre est directement connectée à l'entrée non-inverseuse de l'ALI donc l'impédance d'entrée est **infinie**. C'est un avantage car cela garantit qu'il n'y aura **pas d'effet diviseur de tension entre les deux filtres en cascade** (et ce quelque soit l'impédance de sortie de (F_d)). On pourra donc écrire la fonction de transfert globale sous la forme $\underline{H} = \underline{H}_1 \underline{H}_2$.

16. La composante continue du signal $u_e(t)$ est égale à 10 mV et la fréquence fondamentale est légèrement supérieure à 300 Hz. C'est cohérent avec l'analyse du signal que l'on a mené aux questions 1 et 2.

17. Le spectre de la tension $u_1(t)$ doit être identique à celui de la tension $u_e(t)$, sans la composante continue. Il s'agit donc du **spectre (a)**.

18. Dans le spectre de la tension $u_2(t)$, il n'y a pas de composante continue et l'amplitude du fondamental doit être environ 100 fois plus élevée que dans le spectre de $u_e(t)$, c'est-à-dire légèrement inférieure à 2000 mV. Le seul spectre qui convient est le **spectre (d)**.

Exercice 3 : Une exoplanète : *Proxima Centauri b*

1. On écrit la relation de définition du centre d'inertie en choisissant A confondu avec P :

$$(M_E + M_P) \vec{PG} = M_E \vec{PE} \iff \vec{GP} = \frac{M_E}{M_E + M_P} \vec{EP}$$

Dans la limite $M_P \rightarrow 0$ le centre d'inertie doit être confondu avec E et dans la limite $M_E \rightarrow 0$ il doit être confondu avec P . D'après l'expression ci-dessus :

$$\begin{cases} \vec{GP} = \vec{EP} & (M_P = 0) \\ \vec{GP} = \vec{0} & (M_E = 0) \end{cases} \iff \begin{cases} G \equiv E & (M_P = 0) \\ G \equiv P & (M_E = 0) \end{cases}$$

L'expression est cohérente avec ce qui est attendu dans les cas limites.

2. La planète P est soumise à la force gravitationnelle exercée par l'étoile E :

$$\vec{F}_g = -GM_E M_P \frac{\vec{EP}}{EP^3} = -GM_E M_P \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Dans le référentiel d'étude de centre G supposé galiléen la position de la planète est mesurée par le vecteur position $\vec{GP}$. On applique le principe fondamental de la dynamique à la planète :

$$M_P \frac{d^2 \vec{GP}}{dt^2} = \frac{M_E M_P}{M_E + M_P} \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -GM_E M_P \frac{\vec{r}}{r^3} \iff \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -G(M_E + M_P) \frac{\vec{r}}{r^3}$$

3. On exprime les vecteurs cinématiques du point F en mouvement circulaire dans le référentiel d'étude. On utilise la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ avec $\vec{u}_r = \vec{r}/r$:

$$\vec{r} = r \vec{u}_r \quad ; \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = r\dot{\theta} \vec{u}_\theta \quad ; \quad \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -r\dot{\theta}^2 \vec{u}_r + r\ddot{\theta} \vec{u}_\theta$$

On projette le principe fondamental de la dynamique dans la base polaire :

$$\begin{cases} -r\dot{\theta}^2 = -\frac{G(M_E + M_P)}{r^2} \\ r\ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

La projection sur $\vec{u}_\theta$ nous indique que $\ddot{\theta} = 0 \forall t$ donc que le mouvement circulaire est aussi **uniforme**. La période de révolution s'écrit alors $T = 2\pi/\dot{\theta}$ et on peut réécrire l'équation sur $\vec{u}_r$ sous la forme :

$$r^3 \times \frac{4\pi^2}{T^2} = G(M_E + M_P) \iff \frac{r^3}{T^2} = \frac{G(M_E + M_P)}{4\pi^2}$$

Il s'agit de **la troisième loi de Kepler**.

4. On écrit la relation de définition de G en prenant cette fois-ci A confondu avec E :

$$(M_E + M_P) \vec{EG} = M_P \vec{EP} \iff \vec{GE} = -\frac{M_P}{M_E + M_P} \vec{r}$$

L'orbite de l'étoile s'obtient à partir de celle de F par une **homothétie de rapport** $\frac{M_P}{M_E + M_P}$. Il en va de même pour la vitesse :

$$v_E = \frac{M_P}{M_E + M_P} v_F = \frac{M_P}{M_E + M_P} r\dot{\theta} \iff v_E = \frac{M_P}{M_E + M_P} \frac{2\pi r}{T}$$

5. Dans le cas où la Terre est dans le plan orbital de l'étoile autour de G la vitesse de l'étoile projetée selon l'axe de visée oscille entre $+v_E$ (étoile s'approche de la Terre) et $-v_E$ (étoile s'éloigne de la Terre). On peut donc écrire

$$\left| \frac{f_{\text{obs}} - f_{\text{em}}}{f_{\text{em}}} \right| = \frac{v_E}{c} = \frac{M_P}{M_E + M_P} \frac{2\pi r}{cT}$$

On élimine r en utilisant la troisième loi de Kepler :

$$\left| \frac{f_{\text{obs}} - f_{\text{em}}}{f_{\text{em}}} \right| = \frac{M_P}{M_E + M_P} \frac{2\pi}{T} \times \frac{G^{1/3} (M_E + M_P)^{1/3} T^{2/3}}{(2\pi)^{2/3}} = \boxed{\left(\frac{2\pi G}{T} \right)^{1/3} \frac{M_P}{(M_E + M_P)^{2/3}} \frac{1}{c}}$$

On retrouve un cas particulier de la formule proposée par le professeur Bouchy ($e = 0$, $i = \pi/2$).

6. On évalue grâce à la figure 8 la période de révolution T de l'étoile E ainsi que sa vitesse orbitale v_E (amplitude des oscillations de la vitesse radiale) :

$$T = 11,2 \text{ jours} \quad ; \quad v_E = 6,5 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

On exploite la troisième loi de Kepler pour déterminer M_P . Pour simplifier les calculs on suppose $M_P \ll M_E$ de manière à faire l'approximation $M_E + M_P \simeq M_E$. On trouve alors

$$\boxed{M_P = v_E \left(\frac{M_E^2 T}{2\pi G} \right)^{1/3} = 9,3 \cdot 10^{24} \text{ kg}}$$

Le résultat obtenu confirme que l'hypothèse $M_P \ll M_E$ est pertinente. On obtient une valeur proche de 1,3 masse terrestre, comme indiqué dans l'énoncé.