

DS de physique n° 5

Durée : 3h

L'usage de la calculatrice est autorisé. La copie doit être propre, lisible, sans faute d'orthographe. Les pages doivent être numérotées et **les résultats soulignés ou encadrés**. Un résultat donné sans justification, à moins que l'énoncé le précise, est considéré comme faux. Les valeurs numériques doivent être accompagnées de leur unité. Le devoir comporte 3 exercices indépendants.

Exercice 1 : Microscope à force atomique en mode oscillant

La résolution d'un microscope optique est limitée par la diffraction à une centaine de nanomètres. Différents phénomènes physiques peuvent être exploités pour imager des surfaces avec une résolution inférieure à 10 nm. Nous étudions dans ce problème le microscope à force atomique (ou AFM pour *Atomic Force Microscope*).

La sonde de mesure d'un AFM est principalement constituée d'un levier de dimensions micrométriques au bout duquel est fixée une pointe de forme conique. Cette pointe entre en interaction via les forces de Van der Waals avec les surfaces que l'on cherche à imager. La distance pointe-surface est de l'ordre de quelques nanomètres. Le mode oscillant permet, sans contact avec l'échantillon et donc sans risque de l'endommager, de mesurer le gradient de la force d'interaction entre la pointe et l'échantillon. Les photographies de la figure 1 représentent la pointe d'un microscope à force atomique. Elles ont été obtenues avec un microscope électronique à balayage (MEB).

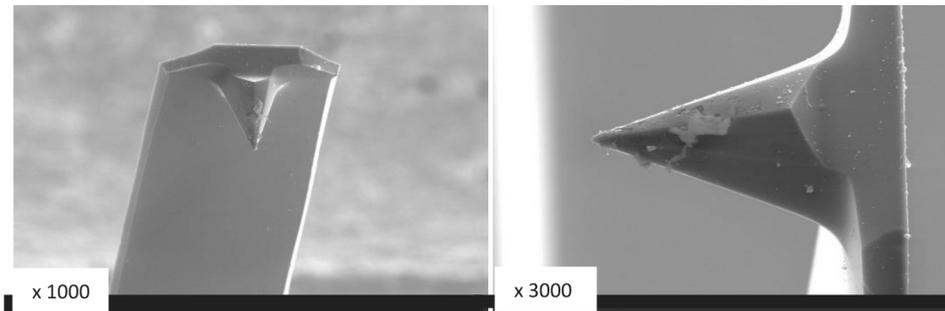


Figure 1. Images MEB d'une pointe AFM

La pointe du microscope se situe sous un levier parallélépipédique de longueur L , de largeur a et d'épaisseur e encastré horizontalement dans une paroi. Au repos, le système levier-pointe, de masse m , est horizontal, à la hauteur d_0 de l'échantillon (on néglige son poids). Quand on applique une force verticale \vec{F}_{ext} (on supposera que la force reste verticale tout au long de l'expérience) à l'extrémité libre du système, celui-ci est déformé. L'extrémité est déplacée verticalement d'une distance z que l'on appelle la flèche (voir figure 2 ci-dessous) et se trouve alors à une distance $d(z)$ de l'échantillon.

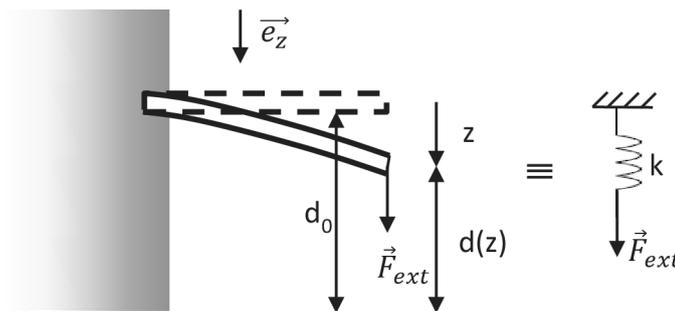


Figure 2. Système encastré dans une paroi et modèle

On admet que lorsque le système levier-pointe est soumis à une force $\vec{F}_{\text{ext}} = F_{\text{ext}}\vec{e}_z$ constante la flèche à l'équilibre z_{eq} est donnée par la relation suivante : $z_{\text{eq}} = \frac{4L^3}{Eae^3}F_{\text{ext}}$ où E est appelé module d'Young du matériau constituant le levier et la pointe.

1. Quelle est la dimension du module d'Young E ?
2. En se plaçant à l'équilibre justifier que l'on peut modéliser le système levier-pointe par un ressort de longueur à vide nulle dont on donnera l'expression de la raideur k en fonction de E , a , L et e .
Déterminer numériquement k pour une fibre de longueur $L = 2,0 \cdot 10^2 \mu\text{m}$, de largeur $a = 50 \mu\text{m}$ et d'épaisseur $e = 5,0 \mu\text{m}$. Le module d'Young vaut $E = 1,0 \cdot 10^{11}$ USI.

Dans un premier temps on ne considère pas les forces d'interaction entre la pointe et l'échantillon. Le levier et la pointe sont seuls. On assimile le système levier-pointe à une masse ponctuelle m attachée à un ressort élastique de raideur k et de longueur à vide nulle, en mouvement vertical de vecteur unitaire \vec{e}_z . On tient compte d'une force de frottement proportionnelle à la vitesse $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$. On place le système dans la position initiale z_0 et on le lâche sans vitesse initiale.

3. Établir l'équation du mouvement du système levier-pointe : $\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = 0$. Donner les expressions littérales de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q .
4. En supposant le système faiblement amorti montrer que $z(t) \simeq z_0 \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) \cos(\omega_0 t)$. On justifiera soigneusement les approximations effectuées.

Désormais on suppose que le déplacement d'une céramique piézoélectrique soumet le système levier-pointe à une force excitatrice $\vec{F}_{\text{ext}} = F_m \cos(\omega t)\vec{e}_z$. On étudie les oscillations forcées du système. On note $A = \frac{F_m}{m}$ et $z(t) = \text{Re}[Z_0 e^{j\omega t}]$.

5. Établir la nouvelle équation différentielle vérifiée par $z(t)$ en fonction des paramètres A , ω_0 et Q .
6. Exprimer l'amplitude complexe Z_0 en fonction de la pulsation ω . Montrer que son module s'exprime sous la forme $|Z_0| = \frac{Z_m}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$ avec $x = \omega/\omega_0$. Déterminer l'expression littérale de Z_m .
7. Établir l'expression de la pulsation de résonance ω_r en fonction de ω_0 et de Q . À quelle condition sur le facteur de qualité la résonance existe-t-elle ?
8. Tracer l'allure de $|Z_0|$ en fonction de ω dans le cas où l'amortissement est faible. Faire apparaître l'expression de l'amplitude des oscillations dans la limite $\omega \rightarrow 0$.

On prend à présent en considération, en plus de la force excitatrice, la force d'interaction entre la pointe et la surface que l'on écrira formellement $\vec{F}_{\text{int}} = F_{\text{int}}\vec{e}_z$, avec F_{int} qui dépend de la position z de la pointe. En faisant l'hypothèse que le système levier-pointe effectue des oscillations de faible amplitude comparé à la distance caractéristique de variation de $F_{\text{int}}(z)$ on peut effectuer le développement de Taylor suivant à l'ordre 1 : $F_{\text{int}}(z) \simeq F_{\text{int}}(z_{\text{eq}}) + (z - z_{\text{eq}}) \left. \frac{dF_{\text{int}}}{dz} \right|_{z_{\text{eq}}}$ où z_{eq} est la position d'équilibre du système que l'on ne cherchera pas à calculer.

9. Montrer que la nouvelle pulsation propre s'écrit $\Omega_0 = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{k} \left. \frac{dF_{\text{int}}}{dz} \right|_{z_{\text{eq}}}}$.

On admet que $F_{\text{int}}(z) = \frac{HR}{6(d(z))^2}$ où R est le rayon de courbure de la pointe et $H = 1,4 \cdot 10^{-20}$ USI est la constante de Hammacker.

10. À l'aide de la figure 2 déterminer une relation entre z , d_0 et $d(z)$, puis exprimer $\left. \frac{dF_{\text{int}}}{dz} \right|_{z_{\text{eq}}}$.
11. Pour un rayon de courbure de 10 nm et une distance pointe-échantillon de 10 nm, évaluer l'écart relatif en termes de pulsation de résonance que génère l'existence d'une interaction. Se produit-il vers les hautes ou les basses fréquences ?

Exercice 2 : Traitement d'un signal

Une guitare comporte six cordes : Mi grave, La, Ré, Sol, Si, Mi aigu. Les fréquences fondamentales théoriques de vibration de ces cordes, notées f_{ac} sont données dans le tableau 1.

Corde	Fréquence (f_{ac})
Mi grave	82,4 Hz
La	110,0 Hz
Ré	146,8 Hz
Sol	196 Hz
Si	246,9 Hz
Mi aigu	329,6 Hz

Tableau 1 Fréquences fondamentales de vibration des cordes de guitare

La figure 2 montre un exemple de signal électrique à la sortie du micro d'une guitare électrique.

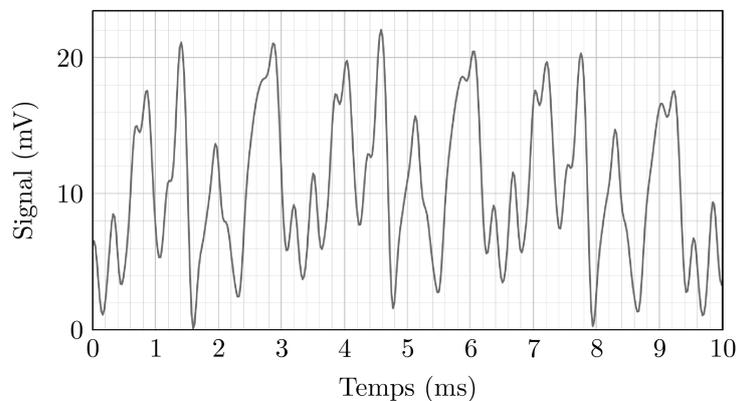


Figure 2 Signal de la guitare

1. Donner une valeur approximative de la valeur moyenne de ce signal.
2. Donner une estimation de la valeur de la fréquence de ce signal (on peut supposer qu'en première approximation le signal est périodique).
3. De quelle corde de guitare s'agit-il ?
4. L'analyse spectrale de ce signal fera-t-elle apparaître des harmoniques ? Justifier.

Le signal électrique provenant du micro de la guitare est envoyé sur le filtre de la figure 3 (filtre (F_a)).

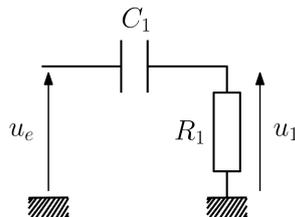


Figure 3 Filtre (F_a)

5. Quelle est la nature de ce filtre ?
6. Déterminer sa fonction de transfert H_1 et exprimer littéralement sa pulsation de coupure ω_1 .
7. On a choisi $R_1 = 100\text{k}\Omega$ et $C_1 = 100\text{nF}$. Déterminer numériquement la fréquence de coupure f_1 à -3 dB de ce filtre. Au vu de l'allure du signal de la figure 2, quel est le rôle de ce premier filtre ?

À la sortie du premier filtre, le signal est envoyé sur un second filtre représenté sur la figure 4 (filtre (F_b)). Dans les questions qui suivent, les signaux sont sinusoïdaux et les amplificateurs linéaires intégrés (ALI) sont supposés idéaux et fonctionnent en régime linéaire. Considérons d'abord le filtre de la figure 4(a).

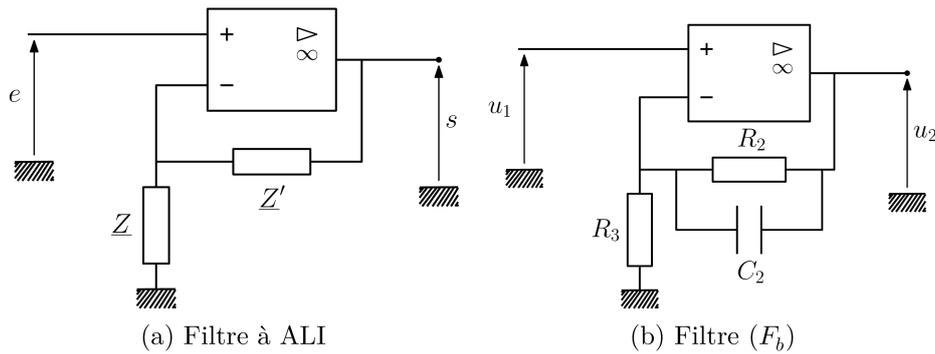


Figure 4 Deux filtres

8. Exprimer sa fonction de transfert \underline{H} en fonction de \underline{Z} et \underline{Z}' .
9. Que devient \underline{H} si \underline{Z} et \underline{Z}' sont des résistances ($\underline{Z} = R$, $\underline{Z}' = R'$) ? Quel est, dans ce cas, l'intérêt du montage ?

On considère maintenant le signal $u_1(t)$, sinusoïdal de pulsation ω qui est envoyé sur le filtre (F_b).

10. Quelle est l'impédance $\underline{Z}_{\text{eq}}$ de la branche constituée par R_2 en parallèle avec C_2 ?
11. Dédurre de la question 8 l'expression de la fonction de transfert \underline{H}_2 de ce filtre en fonction de R_2 , R_3 et C_2 .
12. Mettre \underline{H}_2 sous la forme

$$\underline{H}_2 = 1 + \frac{G_0}{1 + j\omega/\omega_2}$$

et donner les expressions de G_0 et ω_2 .

13. Quelle est la limite de \underline{H}_2 en basse fréquence ? en haute fréquence ?
14. Calculer numériquement la fréquence caractéristique f_2 correspondant à ω_2 si $R_2 = 680\text{k}\Omega$, $R_3 = 6,00\text{k}\Omega$ et $C_2 = 470\text{pF}$ ainsi que G_0 . Expliquer quel est le rôle de ce second filtre.
15. Quelle est l'impédance d'entrée de ce filtre ? Expliquer en quoi cela est un avantage sachant que le filtre (F_b) est placé en cascade derrière (F_a).

La figure 6 correspond au spectre du signal d'entrée u_e représenté sur la figure 2.

16. Justifier qu'il est parfaitement cohérent qu'il s'agisse du spectre du signal de la figure 2.
17. En le justifiant soigneusement, dire quel spectre de la figure 7 correspond à la sortie du premier filtre (F_a).
18. Même question, pour la sortie du filtre (F_b).

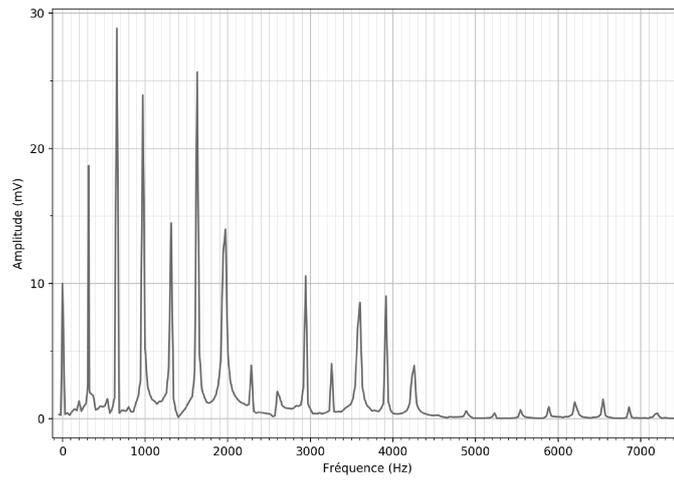
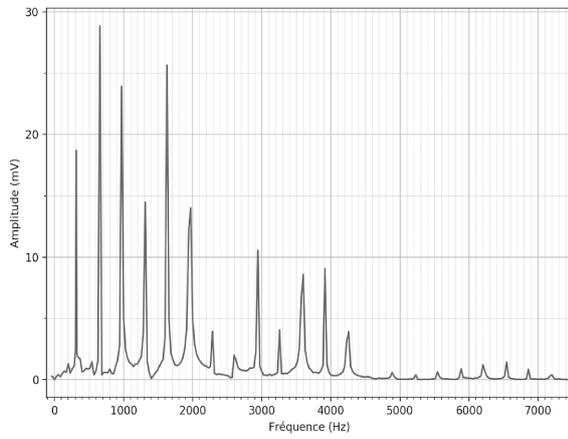
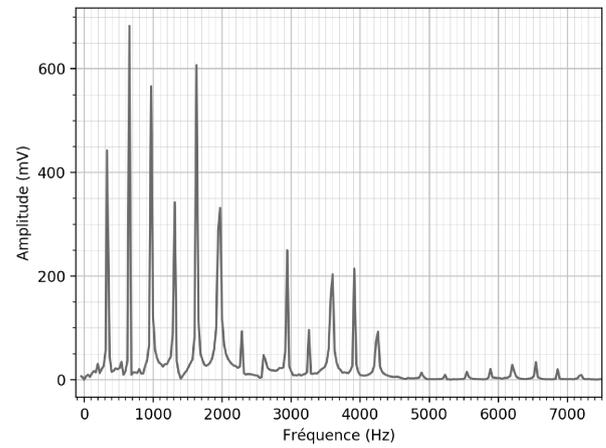


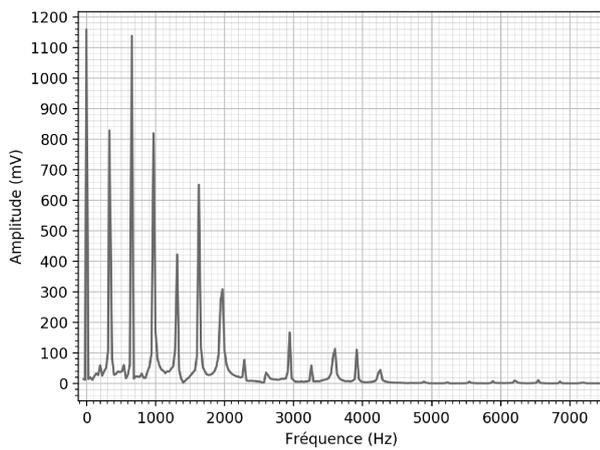
Figure 6 Spectre du signal d'entrée



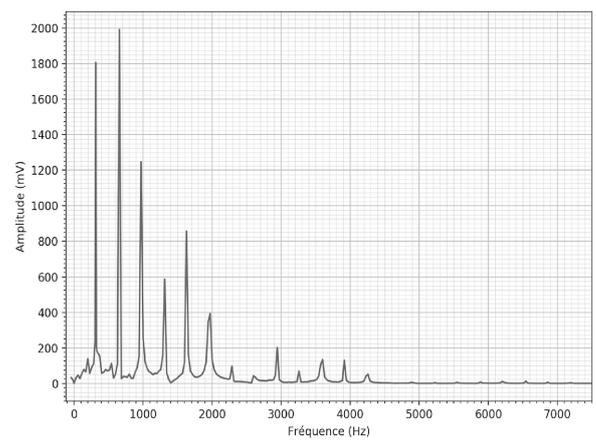
(a)



(b)



(c)



(d)

Figure 7 Spectres

Exercice 3 : Une exoplanète : *Proxima Centauri b*

Le 24 août 2016, l'observatoire européen austral annonce en conférence de presse la découverte de *Proxima Centauri b*, une planète "super Terre" rocheuse de masse M_P d'environ 1,3 masse terrestre, en orbite à une distance de 7 millions de kilomètres de *Proxima Centauri* (soit dans la zone habitable). Cette exo-planète a été détectée, de manière indirecte, par la méthode des vitesses radiales.

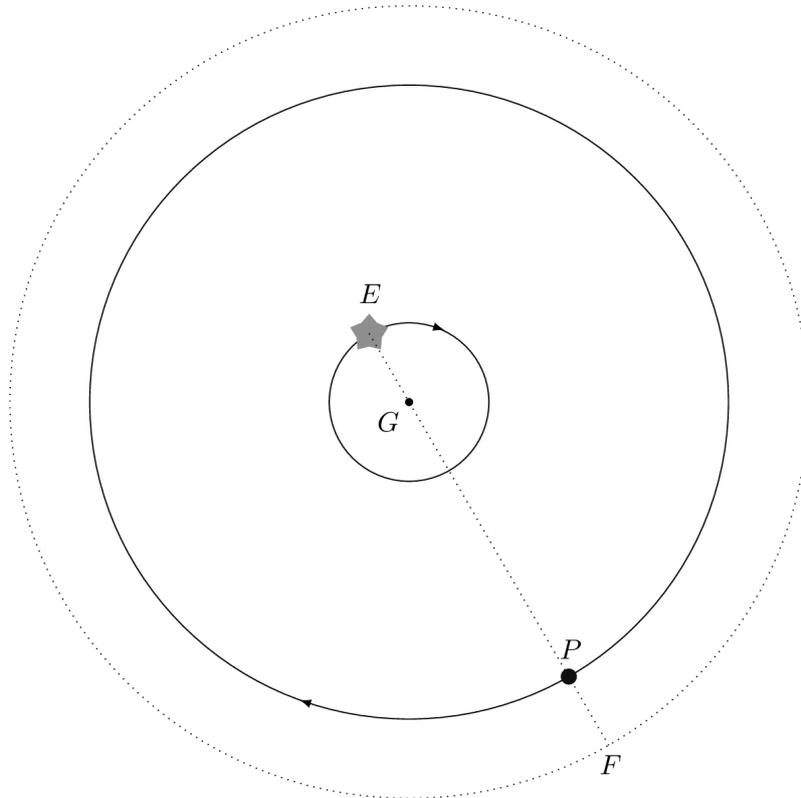


Figure 7 Schéma représentant l'étoile E et la planète P en rotation autour du point G , centre de masse du système {étoile + planète} ; le point F est un point utilisé pour étudier le mouvement de E et P autour de G

A - Étude du mouvement du système {étoile + planète}

La détection de la planète repose sur le fait que le centre de masse G du système {étoile + planète} n'est pas confondu avec le centre de l'étoile. L'étoile E et la planète P tournent toutes les deux autour du centre de masse G du système complet (figure 7).

Le centre de masse G est défini par l'une des deux relations

$$(M_E + M_P)\vec{AG} = M_E\vec{AE} + M_P\vec{AP} \quad \text{pour tout point } A$$

$$M_E\vec{GE} + M_P\vec{GP} = \vec{0}$$

Toutes les autres forces que l'interaction gravitationnelle entre la planète et l'étoile sont négligées. On suppose que le référentiel d'étude, de centre G dont les trois axes pointent vers trois étoiles lointaines est galiléen.

1. Établir la relation $\vec{GP} = \frac{M_E}{M_E + M_P}\vec{EP}$. Contrôler la pertinence de cette expression en étudiant des cas limites.

On note pour la suite $\vec{r} = \vec{EP}$ et $r = \|\vec{r}\|$.

2. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la planète P dans le référentiel d'étude, établir l'équation différentielle vérifiée par \vec{r} .

On considère le point F défini par $\vec{r} = \overrightarrow{GF}$. Ce point est en mouvement circulaire, de période T , autour de G .

3. Établir la relation

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{G(M_E + M_P)}{4\pi^2}$$

Quel nom porte cette loi ?

4. Justifier que E a un mouvement circulaire uniforme autour de G et établir l'expression de sa vitesse de révolution en fonction de M_P , M_E , r et T .

B - Résultats ayant conduit à la découverte de la planète *Proxima Centauri b*

Dans le cas le plus favorable à l'observation, la Terre est dans le plan des trajectoires de E et P (figure 7), l'étoile E possède alors un mouvement apparent oscillant et la mesure de sa composante de vitesse V selon l'axe de visée depuis la Terre est possible par effet Doppler-Fizeau, qui entraîne un décalage des raies spectrales de l'étoile par rapport à leur position mesurée sur Terre, selon la relation

$$\frac{f_{\text{obs}} - f_{\text{em}}}{f_{\text{em}}} = \frac{V}{c}$$

où f_{em} et f_{obs} représentent respectivement la fréquence sans et avec décalage Doppler-Fizeau.

Le professeur Bouchy de l'observatoire astronomique de Provence propose, en 2005, dans son intervention sur les exoplanètes la formule suivante pour le décalage Doppler maximal lors de la détection indirecte d'exoplanètes par la méthode des vitesses radiales

$$\left| \frac{f_{\text{obs}} - f_{\text{em}}}{f_{\text{em}}} \right| = \left(\frac{2\pi G}{T} \right)^{1/3} \frac{M_P \sin i}{(M_P + M_E)^{2/3}} \frac{1}{c\sqrt{1-e^2}}$$

où M_P et M_E sont respectivement les masses de la planète et de l'étoile, T la période de la planète, e l'excentricité de l'orbite et i l'angle entre la ligne de visée et la perpendiculaire au plan orbital du système.

5. En utilisant les résultats de la partie A établir une formule analogue à celle proposée par le professeur Bouchy dans le cas d'une orbite circulaire ($e = 0$) et en supposant que la Terre est dans le plan des trajectoires de E et P ($i = \pi/2$).

6. Connaissant la masse de *Proxima Centauri*, $M_E = 2,44 \cdot 10^{29}$ kg déterminée grâce à l'analyse de son rayonnement, exploiter les données expérimentales de la figure 8 pour déterminer la masse de la planète *Proxima Centauri b*. On supposera que $i = \pi/2$.

Donnée : constante universelle de la gravitation $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$.

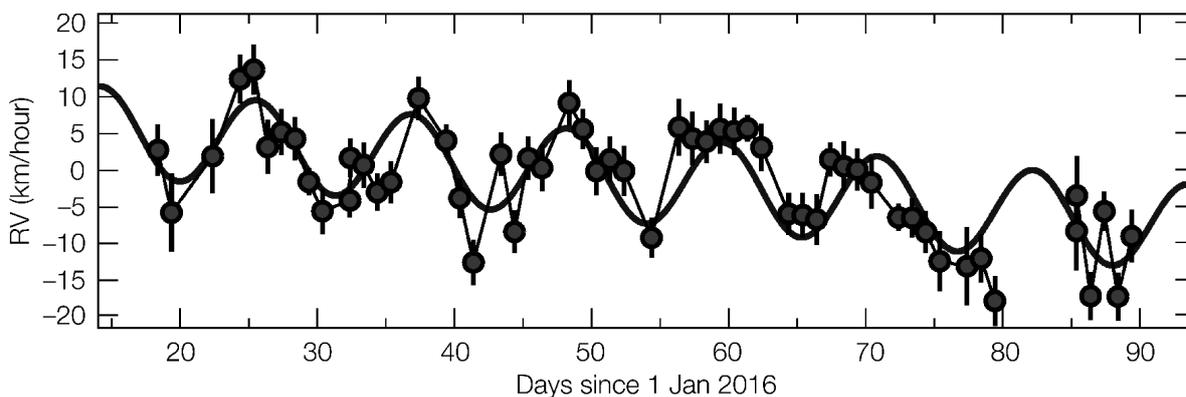


Figure 8 Variations de la vitesse radiale de l'étoile *Proxima Centauri* au cours du premier trimestre 2016 — Source : European Southern Observatory, Guillem Anglada-Escudé