Intégrales multiples

1 Élément de longueur, de surface, de volume

1.1 Élément infinitésimal en physique

Comment calculer le périmètre d'un cercle ? L'aire d'un disque ? Le volume d'une boule ? Ces problèmes de géométrie ont été étudié dès l'antiquité et sont au coeur de l'histoire des mathématiques, notamment car ils font apparaître un nombre aux propriétés bien particulières, π. Aujourd'hui, la méthode la plus courante pour effectuer ces calculs consiste à utiliser le raisonnement intégral, selon la méthode suivante.

Si (S) est une surface dont on souhaite déterminer l'aire, on "fractionne" par la pensée cette dernière en surfaces infiniment petites $\mathrm{d}S$ (appelées surfaces élémentaires). L'aire totale est alors la somme de ces aires élémentaires, et la notation mathématique correspondant à cette somme à deux dimensions s'appelle une intégrale double : $\mathscr{A} = \iint \mathrm{d}S$. Par un raisonnement similaire, on peut déterminer le volume d'un corps en le fractionnant en volumes élémentaires, et le volume total se calcule à partir d'une somme à trois dimensions, appelée intégrale triple : $V = \iiint \mathrm{d}V$.

Bien sur, ce type de raisonnement s'applique également à des systèmes à une dimension. Par exemple, on pourra déterminer la longueur d'une courbe en la fractionnant en segments élémentaires $\mathrm{d}\ell$. La longueur totale se calcule alors sous la forme d'une intégrale simple : $L = \int \mathrm{d}\ell$.

L'expression des éléments $\mathrm{d}\ell$, $\mathrm{d}S$ ou $\mathrm{d}V$ dépend du système de coordonnées dans lequel on se place. Selon la forme de l'objet étudié, il sera souvent plus simple, en terme de calculs, d'utiliser un système de coordonnées plutôt qu'un autre. On présente dans les paragraphes suivants différents exemples d'éléments de longueur, surface et volume dans les systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindro-polaires ou sphériques.

1.2 Définition d'une grandeur locale

Comment calculer la masse d'une boule ? Si cette boule est homogène, alors sa masse est proportionnelle à son volume, et la constante de proportionnalité s'appelle la masse volumique : $\rho = \frac{M}{V}$. Si la densité de la boule est connue alors sa masse s'obtient simplement par $M = \rho \times V$.

Que se passe-t-il si la boule n'est pas homogène, c'est-à-dire si certaines parties sont plus denses que d'autres ? Dans ce cas il faut à nouveau fractionner la boule en volumes élémentaires. Chacun de ces volumes $\mathrm{d}V$ est aussi petit que l'on souhaite, ce qui permet de les supposer homogènes. Si $\mathrm{d}m$ est la masse élémentaire contenue dans le volume $\mathrm{d}V$ on peut définir la masse volumique **locale** de la boule au point P :

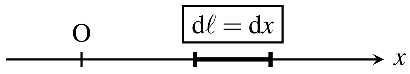
$$\rho(\mathrm{P}) = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V}$$

Si l'on connaît la répartition de masse de la boule (c'est-à-dire si l'on connaît la fonction $\rho(\mathrm{P})$) alors on peut déterminer sa masse totale en sommant les masses de chaque volume élémentaire :

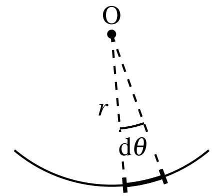
$$M = \iiint \mathrm{d}m = \iiint \rho(\mathrm{P})\mathrm{d}V$$

Rq : De la même manière, on peut définir la masse surfacique $\sigma(\mathrm{P})$ (resp. la masse linéique $\lambda(\mathrm{P})$) en un point d'une surface (resp. d'une courbe).

1.3 Élément de longueur



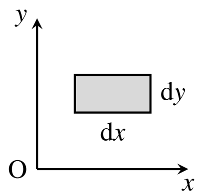
élément de longueur cartésien



$\boxed{\mathrm{d}\ell = r\mathrm{d}\theta}$

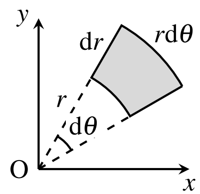
élément de longueur polaire

1.4 Élément de surface



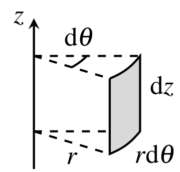
élément de surface cartésien

$\boxed{\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\mathrm{d}y}$



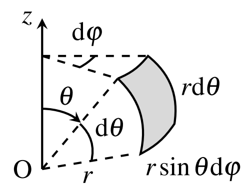
élément de surface polaire

$\boxed{\mathrm{d}S = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}$



élément de surface cylindrique

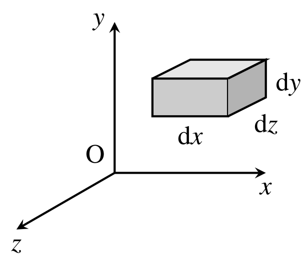
$\boxed{\mathrm{d}S = r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z}$



élément de surface sphérique

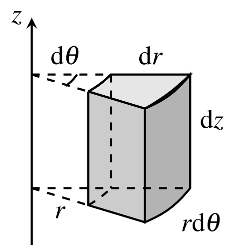
$\boxed{\mathrm{d}S = r^2 \sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi}$

1.5 Élément de volume



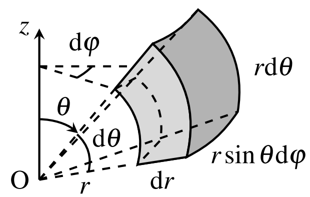
élément de volume cartésien

$\boxed{\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}$



élément de volume cylindrique

$\boxed{\mathrm{d}V = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z}$



élément de volume sphérique

$\boxed{\mathrm{d}V = r^2 \sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi}$

2 Calcul d'intégrale multiple

2.1 Méthode de calcul

Dans le cadre du cours de physique, les intégrales à calculer se font sur des surfaces ou des volumes présentant des symétries particulières, ceci afin de simplifier les calculs. Dans cette situation, un théorème mathématique s'avère très pratique pour résoudre rapidement un calcul d'intégrale multiple. Il s'agit du théorème de FUBINI .

2.1.1 Rectangle fermé dans $\mathbb{R}^n$

Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ le n-uplet qui caractérise la position d'un point dans $\mathbb{R}^n$. On définit un rectangle fermé dans $\mathbb{R}^n$ par :

$$(R) = \{a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1 \; ; a_2 \leqslant x_2 \leqslant b_2 \; ; \dots\dots \; ; a_n \leqslant x_n \leqslant b_n\}$$

La notion de rectangle fermé ne fait pas obligatoirement référence au rectangle plan à deux dimension. La "forme" du rectangle fermé dépend de n (on se restreint aux cas $n = 2$: (R) est une surface fermée et $n = 3$: (R) est un volume fermé). Voici quelques exemples :

- Dans $\mathbb{R}^2$:
  - *paramétrage cartésien* : le rectangle fermé $(R) = \{a \leqslant x \leqslant b \; ; c \leqslant y \leqslant d\}$ est un rectangle de longueur et largeur $(b-a)$ et $(d-c)$.
  - *paramétrage polaire* : le rectangle fermé $(R) = \{0 \leqslant r \leqslant 1 \; ; 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$ est un cercle de centre O et de rayon 1.
  - *paramétrage cylindrique* : le rectangle fermé $(R) = \{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \; ; 0 \leqslant z \leqslant 1\}$ est un ruban replié en cercle sur lui-même, de rayon r et d'épaisseur 1.
  - *paramétrage sphérique* : le rectangle fermé $(R) = \{0 \leqslant \theta \leqslant \pi \; ; 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}$ est une sphère de centre O.
- Dans $\mathbb{R}^3$:
  - *paramétrage cartésien* : le rectangle fermé $(R) = \{a \leqslant x \leqslant b \; ; c \leqslant y \leqslant d \; ; e \leqslant z \leqslant f\}$ est un parallélépipède rectangle de longueur, largeur et hauteur $(b-a)$, $(d-c)$ et $(f-e)$.
  - *paramétrage cylindrique* : le rectangle fermé $(R) = \{0 \leqslant r \leqslant 1 \; ; 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \; ; 0 \leqslant z \leqslant 1\}$ est un cylindre de rayon 1 et de hauteur 1.
  - *paramétrage sphérique* : le rectangle fermé $(R) = \{0 \leqslant r \leqslant 1 \; ; 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \; ; 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}$ est une boule de rayon 1.

2.1.2 théorème de FUBINI

Soit $C(x,y)$ un champ scalaire dépendant de deux variables d'espace (x,y), intégrable sur un rectangle fermé $(R) = \{a \leqslant x \leqslant b \; ; c \leqslant y \leqslant d\}$ de $\mathbb{R}^2$. Alors on peut écrire :

$$\iint_{(R)} C(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d C(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b C(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

Cela signifie qu'on peut séparer l'intégrale double en deux calculs d'intégrale simple successifs. Ce résultat est valable également en trois dimension pour les calculs d'intégrale triple.

Application : calcul de la surface d'une sphère et du volume d'une boule de rayon R, calcul du moment d'inertie d'une tige homogène de longueur $2L$, de masse m, par rapport à un axe passant par son centre.

3 Exercices

3.1 Moment d'inertie

Déterminer le moment d'inertie d'un disque homogène de rayon R, de masse m, par rapport à son axe de symétrie de révolution.

3.2 Masse de l'atmosphère

On assimile la Terre à une sphère de rayon R, entourée par une atmosphère gazeuse s'étendant à l'infini. La masse volumique de l'atmosphère varie en fonction de la distance r au centre de la Terre de la manière suivante : $\rho(r) = \rho_0 \exp\left(-\dfrac{r-R}{H}\right)$, $r \geq R$, où ρ_0 est la masse volumique au niveau de la mer et H est une altitude caractéristique de l'ordre de quelques kilomètres.

1. Déterminer la masse totale M de l'atmosphère en fonction de ρ_0, H et R. On pourra effectuer deux intégrations par partie successives. Simplifier cette expression sachant que $H \ll R$.
2. AN : $\rho_0 = 1{,}2\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, $R = 6{,}4 \cdot 10^3\,\mathrm{km}$, $H = 8{,}2\,\mathrm{km}$. Calculer M.

3.3 Calculer une intégrale simple grâce aux intégrales multiples

On souhaite déterminer l'expression de l'intégrale suivante :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\alpha x^2\right) \mathrm{d}x$$

où α est un réel positif. En l'absence de primitive évidente, on propose une méthode alternative.

1. Montrer que l'on peut écrire $I^2 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\alpha\left(x^2+y^2\right)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
2. Proposer une écriture équivalente de I^2 en utilisant un paramétrage en coordonnées polaires (r,θ) plutôt qu'en coordonnées cartésiennes. Réfléchissez bien aux bornes d'intégration !
3. Déterminer I^2 puis I.