Corrigé DM6

Exercice 1 : Chute d'une tartine beurrée

1. On applique le théorème du moment cinétique à la tartine, par rapport à l'axe fixe (Ay), dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$J_y\ddot{\theta} = \mathscr{M}_y(\vec{P}) + \mathscr{M}_y(\vec{R})$$

Le moment de la réaction est nul car son point d'application se trouve en A sur l'axe (bras de levier nul). Le bras de levier du poids vaut $e\cos\theta$ et le moment du poids s'écrit :

$$\mathscr{M}_y(\vec{P}) = mge\cos\theta$$

On en déduit l'équation du mouvement de la tartine :

$$J_y\ddot{\theta} = mge\cos\theta \iff \ddot{\theta} = \frac{mge}{J_y}\cos\theta$$

En remplaçant le moment d'inertie par son expression et après calculs, on obtient la relation :

$$\boxed{\ddot{\theta} = \eta\frac{g}{e}\cos\theta}$$

La constante K_1 vaut $\boxed{K_1 = \eta}$.

2. La tartine est soumise à son poids, qui est conservative, et à la réaction de la table. La puissance de la réaction est nulle puisque son point d'application A est immobile. Il n'y a pas de force dissipative donc on peut dire que **l'énergie mécanique de la tartine se conserve au cours du mouvement**.

L'altitude du centre d'inertie vaut $z_G = -e\sin\theta$. L'énergie mécanique de la tartine vaut :

$$E = \frac{1}{2}J_y\dot{\theta}^2 - mge\sin\theta$$

À l'instant initial, l'énergie mécanique est nulle ($z_G(t=0) = 0$, $\dot{\theta}(t=0) = 0$). Par conservation de l'énergie mécanique, on en déduit qu'à tout instant :

$$\frac{1}{2}J_y\dot{\theta}^2 - mge\sin\theta = 0 \iff \dot{\theta}^2 = \frac{2mge}{J_y}\sin\theta$$

En remplaçant J_y par son expression, on trouve :

$$\boxed{\dot{\theta}^2 = 2\eta\frac{g}{e}\sin\theta}$$

La constante K_2 vaut $\boxed{K_2 = 2\eta}$.

3. Le centre d'inertie de la tartine a un mouvement circulaire de rayon e :

$$\boxed{\overrightarrow{AG} = e\vec{u}_r} \qquad \boxed{\vec{v}_G = e\dot{\theta}\vec{u}_\theta} \qquad \boxed{\vec{a}_G = -e\dot{\theta}^2\vec{u}_r + e\ddot{\theta}\vec{u}_\theta}$$

4. On applique le principe fondamental de la dynamique à la tartine dans le référentiel terrestre supposé galiléen, projeté sur $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$:

$$\begin{cases} -me\dot{\theta}^2 = mg\sin\theta + T \\ me\ddot{\theta} = mg\cos\theta + N \end{cases}$$

En remplaçant $\ddot{\theta}$ par l'expression obtenue à la question 1 et $\dot{\theta}^2$ par l'expression obtenue à la question 2, on trouve que :

$$\boxed{N = (\eta - 1)mg\cos\theta} \quad \text{et} \quad \boxed{T = -(1+2\eta)mg\sin\theta}$$

5. On détermine numériquement η : $\boxed{\eta = 0{,}01}$. On constate que $\eta \ll 1$. On peut dès lors simplifier les expressions de N et T :

$$\boxed{N \simeq -mg\cos\theta} \quad \text{et} \quad \boxed{T \simeq -mg\sin\theta}$$

6. La tartine effectue un quart de tour complet si $\theta = \frac{\pi}{2}$. À ce moment-là, $N = 0$ et $T = -mg$. La première loi de Coulomb permet d'exprimer la condition d'adhérence de la tartine sur la table en A :

$$\|\vec{T}\| < f\|\vec{N}\|$$

Avec les expression de T et N écrites ci-dessus en $\theta = \frac{\pi}{2}$, on voit que la première loi de Coulomb n'est pas vérifiée. **La tartine va forcément commencer à glisser avant d'avoir effectué un quart de tour complet**.

7. On détermine pour quelles valeurs de θ la première loi de Coulomb est vérifiée :

$$\sin\theta < f\cos\theta = \cos\theta \iff \tan\theta < 1 \iff \boxed{\theta < \theta_0 = \frac{\pi}{4}}$$

La tartine **va glisser après avoir tourné d'un angle de $\frac{\pi}{4}$**.

8. D'après le résultat de la question 2, la vitesse angulaire de la tartine au moment du glissement vaut :

$$\boxed{\dot{\theta}_0 = \sqrt{2\eta\frac{g}{e}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{\sqrt{2}\eta\frac{g}{e}} = 7{,}0\,\mathrm{rad.s^{-1}}}$$

9. La tartine a un mouvement de chute libre vertical dans le référentiel terrestre supposé galiléen. L'application du PFD permet d'obtenir :

$$\ddot{z}_G(t) = -g \qquad \dot{z}_G(t) = -gt \qquad z_G(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h$$

La tartine atteint le sol lorsque $z_G = 0$, à la date :

$$\boxed{t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0{,}45\,\mathrm{s}}$$

10. On admet qu'au cours de la chute, la tartine possède un mouvement de rotation uniforme autour de son centre d'inertie, par conséquent $\dot{\theta}(t) = \mathrm{Cste} = \dot{\theta}_0$. Sachant que $\theta(0) = \theta_0$, on en déduit l'expression littérale de la position angulaire de la tartine à tout instant :

$$\theta(t) = \dot{\theta}_0 t + \theta_0 \iff \boxed{\theta(t) = \sqrt{\sqrt{2}\eta\frac{g}{e}}\,t + \frac{\pi}{4}}$$

On détermine numériquement la valeur de θ au moment où la tartine atteint le sol :

$$\theta(t) = \sqrt{\sqrt{2}\eta\frac{g}{e}}\sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{\pi}{4} \iff \boxed{\theta\left(\sqrt{\frac{2h}{g}}\right) = \sqrt{2\sqrt{2}\eta\frac{h}{e}} + \frac{\pi}{4} = 4,0\,\text{rad} = 2,3\times 10^{2}\,°}$$

La tartine présente sa face beurrée au sol tant que $90° < \theta < 270°$. D'après la valeur obtenue au moment où la tartine touche le sol, on en déduit que **celle-ci tombe du côté beurré !**

11. Sur la Lune, le champ de pesanteur g_L est différent de celui sur la Terre. Reprenons les calculs effectués plus haut ; la condition d'adhérence reste la même que sur la Terre puisqu'elle ne dépend pas de la valeur de g ($\tan\theta < 1$). L'angle de rotation de la tartine au cours de la chute est lui aussi le même que sur Terre puisque son expression ne dépend pas de g ($\sqrt{2\sqrt{2}\eta\frac{h}{e}}$). Par conséquent, sur la Lune, la tartine est dans la même position angulaire que sur Terre lorsqu'elle atteint le sol, **elle tombe aussi du coté beurrée !**

Ce résultat s'interprète simplement. Sur la Lune, la tartine tourne moins vite que sur Terre ($\dot{\theta}_0$ varie en $\sqrt{g}$) mais elle chute aussi plus lentement, ce qui fait qu'elle tourne pendant une durée plus importante avant d'atteindre le sol (durée de chute varie en $1/\sqrt{g}$). Les deux effets se compensent exactement.

Le seul moyen pour sauver son petit-déjeuner consiste à modifier la valeur de la hauteur de la table. On peut soit la prendre suffisamment faible pour que $\theta\left(\sqrt{\frac{2h}{g}}\right) < 90°$ (à la japonaise), soit la prendre suffisamment élevée pour que $\theta\left(\sqrt{\frac{2h}{g}}\right) > 270°$. Je vous laisse déterminer les valeurs de hauteurs qui conviennent, puis conclure sur l'éventuelle fatalité d'avoir sa tartine qui tombe toujours du mauvais coté !

Exercice 2 : Détente d'un gaz

1. On applique la loi des gaz parfaits dans la bouteille à l'état initial :

$$\boxed{n_1 = \frac{P_1V_1}{RT_1} = 48,1\,\text{mol}} \quad ; \quad \boxed{\rho_1 = \frac{P_1M}{RT_1} = 13,5\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}}$$

Le diazote est un gaz parfait diatomique, son énergie interne vaut $\boxed{U_1 = \frac{5}{2}n_1RT_1 = \frac{5}{2}P_1V_1 = 250\,\text{kJ}}$.

2. Les parois de l'enceinte sont diathermes donc à l'équilibre thermique final la température de la bouteille et de l'enceinte sont égales à la température extérieure T_0. Le piston est mobile et sans masse donc à l'équilibre mécanique final la pression dans la bouteille et l'enceinte sont égales à la pression extérieure P_0. On applique la loi des gaz parfaits dans la bouteille à l'état initial :

$$\boxed{n_2 = \frac{P_0V_1}{RT_0} = 4,01\,\text{mol}} \quad ; \quad \boxed{U_1 = \frac{5}{2}n_2RT_0 = \frac{5}{2}P_0V_1 = 25,0\,\text{kJ}}$$

3. Le système {bouteille + enceinte} est fermé donc la quantité de matière n dans l'enceinte à l'état final vaut $n = n_1 - n_2$. On applique la loi des gaz parfaits dans l'enceinte à l'état final :

$$V = \frac{nRT_0}{P_0} \iff \boxed{V = \left(\frac{P_1T_0}{P_0T_1} - 1\right)V_1 = 1100\,\text{L}}$$

4. L'équilibre mécanique rapide s'établit à la pression P_0 dans tout le système. On applique la loi des gaz parfaits dans l'enceinte à l'état final :

$$n = \frac{P_0V}{RT_0}$$

puis on utilise la conservation de la quantité de matière : $\boxed{n_3 = n_1 - n = 9,30\,\text{mol}}$. On applique la loi des gaz parfaits dans la bouteille à l'état final :

$$\boxed{T_3 = \frac{P_0V_1}{n_3R} = 129\,\text{K}} \quad ; \quad \boxed{U_3 = \frac{5}{2}n_3RT_3 = \frac{5}{2}P_0V_1 = 25,0\,\text{kJ}}$$

Exercice 3 : Élévation d'un ballon dans la troposphère

1. Voir cours.

2. On écrit la loi fondamentale de la statique des fluides pour un gaz parfait : $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\frac{Mg}{RT}P$. On intègre en utilisant la méthode de séparation des variables, entre l'altitude $z = 0$ et une altitude z quelconque :

$$\frac{\mathrm{d}P}{P} = -\frac{Mg}{RT_0}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{1-kz} \implies \int_0^z \frac{\mathrm{d}P}{P} = -\frac{Mg}{RT_0}\int_0^z \frac{\mathrm{d}z}{1-kz} \implies \ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = \frac{Mg}{kRT_0}\ln(1-kz)$$

Après passage à l'exponentielle, on obtient : $\boxed{P(z) = P_0(1-kz)^{\frac{Mg}{kRT_0}}}$.

3. D'après la loi des gaz parfaits : $\boxed{\mu(z) = \frac{P(z)M}{RT(z)} = \mu_0(1-kz)^{\alpha-1}}$.

$\boxed{P(5\,\text{km}) = 0,54\,\text{bar}}$ et $\boxed{\mu(5\,\text{km}) = 0,73\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}}$.

4. Les masses volumiques de l'air et de l'hélium valent respectivement $\mu_{\text{air}} = \frac{P(z)M_{\text{air}}}{RT(z)}$ et $\mu_{\text{He}} = \frac{P(z)M_{\text{He}}}{RT(z)}$. Quelle que soit l'altitude, le rapport de ces masses volumiques ne dépend que des masse molaires : $\boxed{d = \frac{\mu_{\text{He}}}{\mu_{\text{air}}} = \frac{M_{\text{He}}}{M_{\text{air}}} = 0,14}$.

5. Le ballon est soumis à son poids et à la poussée d'Archimède exercée par l'air extérieur. Au sol, cette force vaut :

$$\vec{F} = (m + \mu_{\text{He}}V_0 - \mu_{\text{air}}V_0)\vec{g} \implies \boxed{\vec{F} = [m + (d-1)\mu_0V_0]\,\vec{g}}$$

6. Le ballon s'élève si cette force est dirigée vers le haut, c'est-à-dire si $m + (d-1)\mu_0V_0 < 0$. L'AN donne $m + (d-1)\mu_0V_0 = -110\,\text{kg}$. **La condition est bien vérifiée ici**.

7. La quantité de matière en hélium restant initialement constante dans le ballon, le volume vérifie :

$$\frac{P_0V_0}{T_0} = \frac{P(z)V(z)}{T(z)} \implies \boxed{V(z) = V_0\frac{P_0T(z)}{P(z)T_0} = V_0(1-kz)^{1-\alpha}}$$

8. Le volume du ballon atteint sa valeur maximale lorsque :

$$V(z_1) = V_{\max} \implies (1-kz_1)^{1-\alpha} = \frac{V_{\max}}{V_0} = 2 \implies 1-kz_1 = 2^{\frac{1}{1-\alpha}} \implies \boxed{z_1 = \frac{1}{k}\left(1 - 2^{\frac{1}{1-\alpha}}\right) = 6,6\,\text{km}}$$

9. À volume constant, la force ascensionnelle, qui vaut $F = [(1-d)\mu(z)V_{\max} - m]\,g$ décroît car la masse volumique $\mu(z)$ décroît avec l'altitude. Le ballon atteint son plafond lorsque cette force s'annule :

$$F = 0 \iff \boxed{z_2 = \frac{1}{k}\left[1 - \left(\frac{m}{(1-d)\mu_0V_{\max}}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\right] = 8,0\,\text{km}}$$