

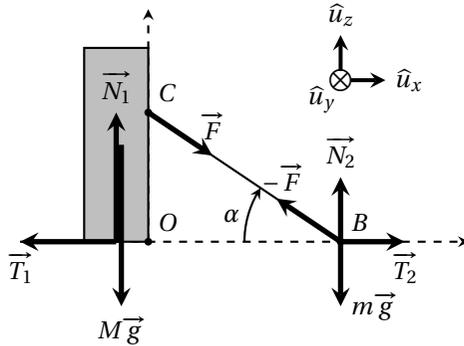
Corrigé DS6

Exercice 1 : Chute d'arbres

II.A. — Chute d'un arbre mort

□ 1 Le bûcheron est fixe dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Il est soumis à son poids $m\vec{g}$, à la réaction \vec{R}_2 du sol et à la tension du câble.

\vec{F} est la force exercée par le câble sur l'arbre. D'après le principe des actions réciproques, l'arbre exerce sur l'extrémité gauche du câble la force $-\vec{F}$. La câble est sans masse et tendu. Si l'on suppose qu'il est *inextensible* alors la tension F se conserve tout le long du câble. On en déduit que le câble exerce sur le bûcheron la force $-\vec{F}$.



Par application du principe fondamental de la dynamique au bûcheron dans le référentiel terrestre :

$$\vec{0} = m\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{T}_2 - \vec{F}$$

On projette cette équation sur \hat{u}_x et \hat{u}_y :

$$\begin{cases} 0 = T_2 - F \cos \alpha \\ 0 = N_2 - mg + F \sin \alpha \end{cases} \iff \boxed{T_2 = F \cos \alpha} \text{ et } \boxed{N_2 = mg - F \sin \alpha}$$

D'après la première loi de Coulomb, la condition de non-glisement du bûcheron s'écrit :

$$\|\vec{T}_2\| < f \|\vec{N}_2\| \iff F(\cos \alpha + f \sin \alpha) < fmg \iff \boxed{F_{\max} = \frac{fmg}{\cos \alpha + f \sin \alpha}}$$

□ 2 On applique également le principe fondamental de la dynamique à l'arbre, supposé fixe, dans le référentiel terrestre galiléen, projeté sur \hat{u}_x et \hat{u}_y :

$$\begin{cases} 0 = T_1 + F \cos \alpha \\ 0 = N_1 - Mg - F \sin \alpha \end{cases} \iff \boxed{T_1 = -F \cos \alpha} \text{ et } \boxed{N_1 = Mg + F \sin \alpha}$$

La condition de non-glisement de l'arbre s'écrit :

$$\|\vec{T}_1\| < f \|\vec{N}_1\| \iff F < \frac{fMg}{\cos \alpha - f \sin \alpha}$$

On reconnaît que $F_{\max} = \frac{fmg}{\cos \alpha + f \sin \alpha} < \frac{fMg}{\cos \alpha - f \sin \alpha}$.

Cela signifie que le bûcheron glisse avant l'arbre si la tension F devient trop importante. Par conséquent, tant que $0 \leq F \leq F_{\max}$, il n'y a pas de glissement possible en O .

□ 3 Le poids s'applique au centre d'inertie G de l'arbre, qui se trouve à une distance a de l'axe (O, \hat{u}_y) :

$$\Gamma_g = (\vec{OG} \wedge M\vec{g}) \cdot \hat{u}_y = \left[\left(-a\hat{u}_x + \frac{H}{2}\hat{u}_y \right) \wedge (-Mg\hat{u}_z) \right] \cdot \hat{u}_y \iff \boxed{\Gamma_g = -Mga}$$

□ 4 On applique le théorème du moment cinétique à l'arbre, par rapport à l'axe (O, \hat{u}_y) , dans le référentiel terrestre galiléen, dans la situation d'équilibre :

$$0 = \Gamma_g + \Gamma_B + \mathcal{M}_y(\vec{T}_1) + \mathcal{M}_y(\vec{N}_1)$$

Ici, $\mathcal{M}_y(\vec{T}_1) = 0$ car le support de \vec{T}_1 coupe l'axe (O, \hat{u}_y) . L'arbre entre en rotation quand la réaction \vec{N}_1 s'annule, c'est-à-dire quand $\mathcal{M}_y(\vec{N}_1) = 0$. La valeur minimale de Γ_B permettant à l'arbre de pivoter autour de l'axe (O, \hat{u}_y) est $\boxed{\Gamma_{B,\min} = Mga}$.

□ 5 On calcule le moment Γ_B :

$$\Gamma_B = (\vec{OC} \wedge \vec{F}) \cdot \hat{u}_y = [z_c \hat{u}_z \wedge (F \cos \alpha \hat{u}_x - F \sin \alpha \hat{u}_z)] \cdot \hat{u}_y = z_c F \cos \alpha$$

L'altitude $z_c = \ell \sin \alpha$. On en déduit l'expression du moment de la force \vec{F} :

$$\Gamma_B = \ell F \cos \alpha \sin \alpha = \frac{\ell F}{2} \sin(2\alpha)$$

Le moment est maximal, pour une force F et une longueur de câble donnée, lorsque $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

□ 6 On a montré à la question précédente que $\Gamma_B = \ell F \cos \alpha \sin \alpha$. Dans le cas où $F = F_{\max}$:

$$\Gamma_B = \ell \frac{fmg}{\cos \alpha + f \sin \alpha} \cos \alpha \sin \alpha$$

En divisant au numérateur et au dénominateur par $f \cos \alpha \sin \alpha$, on obtient l'expression attendue :

$$\Gamma_B = \frac{mg\ell}{\frac{1}{f \sin \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha}}$$

Le moment est maximal lorsque $\phi(\alpha)$ est minimale.

$$\phi'(\alpha_m) = 0 \iff -\frac{\cos \alpha_m}{f \sin^2 \alpha_m} + \frac{\sin \alpha_m}{\cos^2 \alpha_m} = 0 \iff \tan^3 \alpha_m = \frac{1}{f} \iff \alpha_m = \arctan(f^{-1/3})$$

$$\theta_s = \beta = \arctan\left(\frac{2a}{H}\right)$$

Lorsque $f = 1$, $\alpha_m = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.

□ 7 On détermine numériquement F_{\max} , en supposant qu'on a choisi $\alpha = \alpha_m = \frac{\pi}{4}$:

$$F_{\max} = \frac{10^2 \times 10^1}{\sqrt{2}} = 7 \times 10^2 \text{ N}$$

La longueur de corde nécessaire pour initier la rotation de l'arbre vérifie :

$$\Gamma_B = \frac{mg\ell}{\phi(\alpha)} = Mga \iff \ell = \phi(\alpha) \frac{Ma}{m}$$

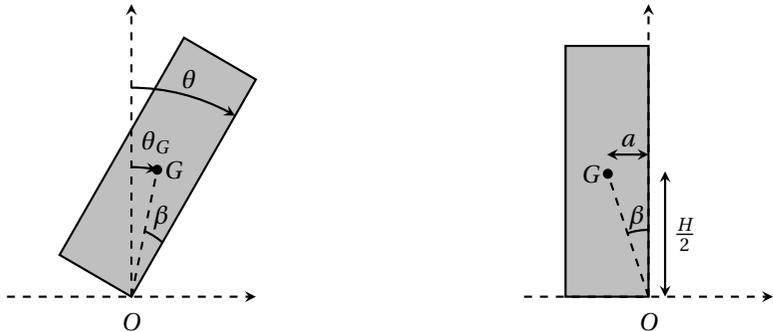
On effectue l'application numérique :

$$\ell = \frac{10^3 \times 0,5}{10^2} \times 2\sqrt{2} \approx 14 \text{ m}$$

La force F_{\max} est équivalente au poids d'une masse d'environ 70 kg. Les deux valeurs obtenues permettent d'envisager qu'un bûcheron en bonne forme physique puisse, seul, abattre un arbre mort d'environ une tonne en utilisant un câble.

□ 8 On note θ_G la position angulaire du centre d'inertie G de l'arbre et z_G son altitude (voir schéma ci-après). L'énergie potentielle de pesanteur de l'arbre vaut :

$$E_p = Mgz_G = MgOG \cos \theta_G = MgOG \cos(\theta - \beta)$$



avec $OG = \sqrt{\left(\frac{H}{2}\right)^2 + a^2}$ et l'angle β qui vérifie $\tan \beta = \frac{2a}{H}$.

$$E_p = Mg \sqrt{\left(\frac{H}{2}\right)^2 + a^2} \cos\left(\theta - \arctan\left(\frac{2a}{H}\right)\right)$$

Si le bûcheron opère de manière quasi-statique, il peut lâcher le câble dès que $\Gamma_g > 0$, c'est-à-dire dès que $\theta_G > 0$ ou encore $\theta > \beta$.

On détermine numériquement cet angle, en degrés, en faisant l'approximation $\theta_s \approx \frac{2a}{H}$ (en radians, car $\frac{2a}{H} \ll 1$) :

$$\theta_s = \frac{180}{\pi} \times \frac{1}{20} = \frac{9}{\pi} \approx 3^\circ$$

□ 9 Pour que $\Gamma_r(0^+) = \Gamma_0$, il faut choisir $\beta = 1$. On a alors $\Gamma_r(\theta_c) = 0$. Pour rendre compte des mesures expérimentales, il faut choisir $\theta_c = 10^\circ$. Le minimum de Γ_r est atteint lorsque :

$$\frac{d\Gamma_r}{d\theta} = 0 \iff \Gamma_0 \left(\frac{4}{\theta_c} - \frac{10\theta_m}{\theta_c^2} \right) = 0 \iff \theta_m = \frac{2\theta_c}{5}$$

Le moment minimal vaut alors :

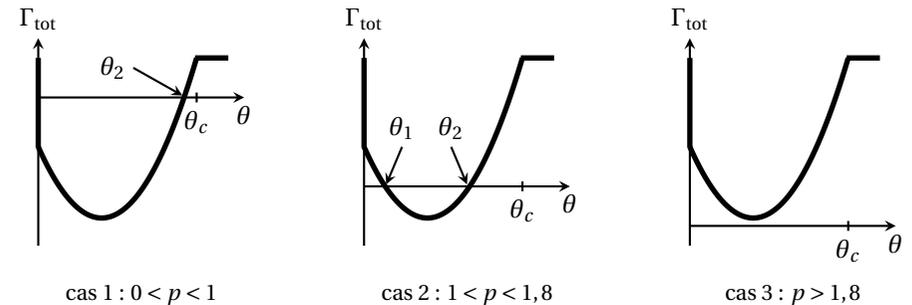
$$\Gamma_m = \Gamma_r(\theta_m) = \frac{9\Gamma_0}{5}$$

Numériquement, avec $\Gamma_0 = -9 \times 10^3 \text{ N.m}$, obtient :

$$\theta_m = 4^\circ \quad \text{et} \quad \Gamma_m = -16,2 \times 10^3 \text{ N.m}$$

Ces valeurs sont compatibles avec les résultats expérimentaux.

□ 10 Soumis à l'action du vent, l'arbre subit un moment total égal $\Gamma_{\text{tot}} = \Gamma_v + \Gamma_r$ (on néglige l'action du poids). On représente ci-dessous l'allure de $\Gamma_{\text{tot}}(\theta)$, dans trois cas de figure.



En premier lieu on note que quelle que soit la valeur de p , $\Gamma_{\text{tot}}(0) > 0$ (car $\Gamma_r(0) = 0$).

La position $\theta = 0$ n'est **jamais** une position d'équilibre.

- Dans le cas 1 : $0 < p < 1$, $\Gamma_{\text{tot}}(0^+) < 0$. Dès que l'arbre quitte la position $\theta = 0$, le moment résultant l'y ramène.

Pour $0 < p < 1$, l'arbre peut rester au voisinage de $\theta = 0$.

Toujours dans le cas 1, on reconnaît qu'il existe une position d'équilibre ailleurs qu'en $\theta = 0$ (notée θ_2). On étudie sa stabilité. Pour cela, on considère un petit déplacement $\delta\theta$ (avec $|\delta\theta| \ll \theta_2$) autour de la position d'équilibre.

- si $\delta\theta > 0$, $\Gamma_{\text{tot}}(\theta_2 + \delta\theta) > 0$,
- si $\delta\theta < 0$, $\Gamma_{\text{tot}}(\theta_2 + \delta\theta) < 0$.

Dans les deux cas, si l'arbre quitte la position d'équilibre θ_2 , le moment résultant l'en éloigne.

La position d'équilibre θ_2 est instable.

- Dans le cas 2 : $1 < p < 1,8$ correspond à $|\Gamma_0| < \Gamma_v < |\Gamma_m|$. Il existe deux positions d'équilibre, notées θ_1 et θ_2 . Par des raisonnements analogues à ceux du cas précédent, on montre que :

La position d'équilibre θ_1 est stable et θ_2 est instable.

Bien que la position θ_1 soit stable, il n'est pas certain que l'arbre résiste au vent car si, sous l'effet d'une rafale, l'arbre s'incline au-delà de θ_2 , il chutera.

- Dans le cas 3 : $p > 1,8$, $\Gamma_{\text{tot}} > 0$ pour toute valeur de θ .

Si le vent souffle suffisamment fort, l'arbre chute nécessairement.

- 11 On applique le théorème du moment cinétique à l'arbre dans le référentiel terrestre supposé galiléen, par rapport à l'axe (O, \hat{u}_y) :

$$J\ddot{\theta} = \Gamma_v + \Gamma_r = \Gamma_v + \Gamma_0 \left(1 + 4 \frac{\theta}{\theta_c} - 5 \frac{\theta^2}{\theta_c^2} \right)$$

On multiplie les deux membres par $\dot{\theta}$ et on intègre entre $t = 0$ et une date t quelconque :

$$\int_0^t J\dot{\theta}\ddot{\theta} dt = \int_0^t \dot{\theta} \left[\Gamma_v + \Gamma_0 \left(1 + 4 \frac{\theta}{\theta_c} - 5 \frac{\theta^2}{\theta_c^2} \right) \right] dt$$

Avec les conditions initiales $\theta(0) = 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$, l'intégrale aboutit à :

$$\frac{1}{2} J\dot{\theta}^2 = \Gamma_v\theta + \Gamma_0 \left(\theta + 2 \frac{\theta^2}{\theta_c} - \frac{5}{3} \frac{\theta^3}{\theta_c^2} \right) = |\Gamma_0|\theta \left[p - 1 - 2 \frac{\theta}{\theta_c} + \frac{5}{3} \frac{\theta^2}{\theta_c^2} \right]$$

On obtient la forme attendue, avec $P(u) = p - 1 - 2u + \frac{5}{3}u^2$.

L'arbre sera déraciné si $\dot{\theta}$ **ne s'annule jamais**, c'est-à-dire si le trinôme $P(u)$ ne change jamais de signe. Cela revient à dire que **son discriminant est strictement négatif**.

$$\Delta < 0 \iff 4 - 4 \times \frac{5}{3} \times (p-1) < 0$$

Après simplification, on obtient la condition : $p > p_c = \frac{8}{5} = 1,6$.

- 12 On cherche la première valeur de θ pour laquelle $\dot{\theta}$ s'annule.

$$P(u) = 0 \iff \frac{1}{3} - 2u + \frac{5}{3}u^2 = 0 \iff 1 - 6u + 5u^2 = 0$$

Le discriminant vaut $\Delta = 36 - 20 = 16 > 0$. Le trinôme admet deux racines réelles :

$$u_1 = \frac{6-4}{10} = \frac{1}{5} \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{6+4}{10} = 1$$

Le mouvement de l'arbre est borné entre $\theta = 0$ et $\theta = \min\left(\frac{\theta_c}{5}, \theta_c\right) = \frac{\theta_c}{5} = 2^\circ$.

En réalité, le mouvement de l'arbre est amorti par l'existence de frottements. On est dans le cas $1 < p < 1,8$ donc il existe une position d'équilibre stable, notée θ_∞ , dans laquelle l'arbre demeurera immobile, une fois son mouvement transitoire d'oscillations amorties achevé.

Exercice 2 : Équilibre et stabilité de l'atmosphère

1. à 4. Voir cours.

5. $H = 8,0 \text{ km}$ Cette valeur permet d'obtenir un ordre de grandeur de l'épaisseur de l'atmosphère, environ quelques dizaines de kilomètres. On peut assimiler l'atmosphère terrestre à **une couche très fine** comparée à son rayon $R_T \sim 6,4 \cdot 10^3 \text{ km}$.

6. On dérive la relation $P(z)^{1-\gamma} T(z)^\gamma = \text{Cste}$ par rapport à z :

$$(1-\gamma)P(z)^{-\gamma} T(z)^\gamma \frac{dP}{dz} + \gamma P(z)^{1-\gamma} T(z)^{\gamma-1} \frac{dT}{dz} = 0 \iff P(z)^{1-\gamma} T(z)^{\gamma-1} \left((1-\gamma) \frac{T(z)}{P(z)} \frac{dP}{dz} + \gamma \frac{dT}{dz} \right) = 0$$

On exprime le gradient de pression à l'aide de la loi fondamentale de la statique des fluides et de la loi des gaz parfaits (comme vu à la question 1) :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho(z)g = -\frac{P(z)Mg}{RT(z)} \iff \frac{T(z)}{P(z)} \frac{dP}{dz} = -\frac{Mg}{R}$$

On peut alors conclure :

$$-(1-\gamma) \frac{Mg}{R} - \gamma \Gamma_a = 0 \iff \Gamma_a = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{Mg}{R}$$

Astuce : Pour calculer la première dérivée il est avantageux de passer d'abord au **logarithme** :

$$P(z)^{1-\gamma} T(z)^\gamma = \text{Cste} \iff \ln(P(z)^{1-\gamma} T(z)^\gamma) = \text{Cste}$$

$$\iff (1-\gamma) \ln P(z) + \gamma \ln T(z) = \text{Cste}$$

$$\iff \frac{1-\gamma}{P(z)} \frac{dP}{dz} + \frac{\gamma}{T(z)} \frac{dT}{dz} = 0$$

7. $\Gamma_a = 9,7 \text{ K} \cdot \text{km}^{-1}$. Cette valeur est plus élevée que celle mesurée dans la troposphère terrestre, de l'ordre de $6,5 \text{ K} \cdot \text{km}^{-1}$. Le modèle adiabatique réversible conduit à **une surévaluation du gradient de température**, il faut donc prendre ce modèle avec précaution pour décrire la troposphère terrestre.

8. Dans le modèle utilisé le gradient de température est **uniforme** car γ , R , M et g sont supposées indépendantes de l'altitude. On détermine le champ de température en intégrant avec la condition limite $T(z=0) = T_0$: $T(z) = T_0 - \Gamma_a z$.

9. On intègre la loi fondamentale de la statique des fluides dans le modèle adiabatique réversible :

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dz} &= -\frac{P(z)Mg}{R(T_0 - \Gamma_a z)} \Rightarrow \int_{P_0}^{P(z)} \frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{R} \int_0^z \frac{dz}{T_0 - \Gamma_a z} \\ &\Rightarrow \ln \frac{P(z)}{P_0} = \frac{Mg}{R\Gamma_a} \ln \frac{T_0 - \Gamma_a z}{T_0} \\ &\Rightarrow P(z) = P_0 \left(1 - \frac{\Gamma_a}{T_0} z \right)^{\frac{Mg}{R\Gamma_a}} \end{aligned}$$

10. La partie la plus dense de l'atmosphère a une épaisseur de l'ordre de quelques dizaines de kilomètres. Or la valeur du gradient de température adiabatique réversible conduirait dans ce modèle à une température de l'air égale au zéro absolu à une altitude d'environ trente kilomètres. On voit que ce modèle n'est pas réaliste pour décrire toute l'atmosphère.

11. Pour un équilibre isotherme $\Gamma = 0$ et on a vu précédemment que pour un équilibre adiabatique réversible $\Gamma = \Gamma_a = 9,7 \text{ K} \cdot \text{km}^{-1}$.

12. On peut imaginer qu'à la suite de son déplacement la pression de la particule de fluide est égale à celle de l'air environnant tandis que sa température ne l'est pas car **un équilibre mécanique s'établit généralement beaucoup plus vite qu'un équilibre thermique**.

13. La particule de fluide est soumise :

- à son poids $\vec{P} = -\rho_p(z)\delta V_p(z)\vec{u}_z$;
- à la poussée d'Archimède exercée par l'air environnant $\vec{\Pi} = -\rho(z)\delta V_p(z)g\vec{u}_z$.

Notons que l'on fait l'approximation que la viscosité de l'air est négligeable (ce qui est une hypothèse raisonnable pour un gaz). La résultante des forces extérieures s'écrit donc :

$$\vec{F} = \delta V_p(z)(\rho(z) - \rho_p(z))g\vec{u}_z$$

14. On applique le principe fondamental de la dynamique à la particule de fluide, située à l'altitude $z = z_0 + \delta z$, dans le référentiel terrestre supposé galiléen. La masse de la particule de fluide $\delta m = \rho_p(z_0 + \delta z)\delta V_p(z_0 + \delta z)$ est en fait indépendante de l'altitude car le système est supposé fermé.

$$m\vec{a} = \vec{F} \Leftrightarrow \rho_p(z_0 + \delta z)\delta V_p(z_0 + \delta z) \frac{d^2(\delta z)}{dt^2} \vec{u}_z = \delta V_p(z_0 + \delta z)(\rho(z_0 + \delta z) - \rho_p(z_0 + \delta z))g\vec{u}_z$$

On projette sur \vec{u}_z et on simplifie :

$$\frac{d^2(\delta z)}{dt^2} = \left(1 - \frac{\rho_p(z_0 + \delta z)}{\rho(z_0 + \delta z)} \right) g$$

En utilisant la loi des gaz parfaits et l'égalité des pressions de la particule de fluide et de l'air environnant on obtient que

$$1 - \frac{\rho_p(z_0 + \delta z)}{\rho(z_0 + \delta z)} = 1 - \frac{T(z_0 + \delta z)}{T_p(z_0 + \delta z)}$$

On effectue ensuite un développement au premier ordre des températures :

$$\begin{cases} T(z_0 + \delta z) \approx T(z_0) + \delta z \frac{dT}{dz} = T(z_0) - \Gamma(z_0)\delta z \\ T_p(z_0 + \delta z) = T_p(z_0) + \frac{dT_p}{dz}(z_0)\delta z \end{cases}$$

On continue en rappelant que d'après l'énoncé $T_p(z_0) = T(z_0)$. Puisque l'évolution de la particule de fluide est adiabatique réversible et qu'elle est à tout instant en équilibre mécanique avec l'air environnant on peut écrire (comme on l'a vu à la question 6) que $\frac{dT_p}{dz}(z_0) = -\Gamma_a(z_0)$ et donc :

$$1 - \frac{T(z_0 + \delta z)}{T_p(z_0 + \delta z)} \approx 1 - \frac{T(z_0) - \Gamma(z_0)\delta z}{T(z_0) - \Gamma_a(z_0)\delta z} = \frac{(\Gamma(z_0) - \Gamma_a(z_0))\delta z}{T(z_0) - \Gamma_a(z_0)\delta z} \approx \frac{\Gamma(z_0) - \Gamma_a(z_0)}{T(z_0)} \delta z$$

En revenant au PFD on obtient finalement

$$\frac{d^2(\delta z)}{dt^2} = \frac{\Gamma(z_0) - \Gamma_a(z_0)}{T(z_0)} \delta z g \Leftrightarrow \frac{d^2(\delta z)}{dt^2} + \frac{\Gamma_a(z_0) - \Gamma(z_0)}{T(z_0)} g \delta z = 0$$

Par identification on écrit $\kappa = \frac{\Gamma_a(z_0) - \Gamma(z_0)}{T_0} g$.

15. L'atmosphère est stable à condition que $\kappa > 0$, autrement dit $\Gamma(z_0) < \Gamma_a(z_0)$.

16. Pour une atmosphère isotherme $\Gamma = 0 < \Gamma_a \forall z_0$: **elle est stable**.

17. Les nuages se produisent lorsque la vapeur d'eau contenue dans une particule d'air se liquéfie. Dans une atmosphère stable les particules de fluide oscillent autour de leur altitude d'équilibre, on peut donc s'attendre à avoir des nuages **de faible épaisseur**. À l'inverse dans une atmosphère instable les particules de fluide tendent à s'éloigner de leur altitude d'équilibre, on risque d'observer des nuages **d'épaisseur importante**.

Exercice 3 : Fonctionnement d'un compresseur

1. Lorsque l'on tire le piston pour la première fois, le gaz qui occupait initialement le volume V_0 de l'enceinte D à la pression P_0 se détend pour occuper le volume $V_0 + V_M$ à la pression $P_{R,1} = P_{d,1}$. Comme la température et la quantité de matière se conservent, on peut écrire :

$$P_0 V_0 = P_{R,1} (V_0 + V_M) \Leftrightarrow P_{R,1} = \frac{V_0}{V_0 + V_M} P_0$$

On écrit la loi des gaz parfait dans le réservoir dont le volume est V_M :

$$n_{R,1} = \frac{P_{R,1} V_M}{RT_0} \Leftrightarrow n_{R,1} = \frac{P_0 V_0 V_M}{RT_0 (V_0 + V_M)}$$

2. La quantité de matière initiale dans l'enceinte G vaut :

$$n_{g,0} = \frac{P_0 V_0}{RT_0}$$

Après avoir repoussé le piston, la quantité de matière devient égale à $n_{g,0} + n_{R,1}$. La pression vaut alors :

$$P_{R,1} = \frac{(n_{g,0} + n_{R,1})RT_0}{V_0} \iff P_{R,1} = P_0 \left(1 + \frac{V_M}{V_0 + V_M} \right)$$

3. On reprend le raisonnement de la question 1. Lorsque l'on tire le piston pour la N -ième fois, le gaz qui occupait initialement le volume V_0 de l'enceinte D à la pression $P_{d,N}$ se détend pour occuper le volume $V_0 + V_M$ à la pression $P_{d,N+1}$. Comme la température et la quantité de matière se conservent, on peut écrire :

$$P_{d,N} V_0 = P_{d,N+1} (V_0 + V_M) \iff P_{d,N+1} = \frac{V_0}{V_0 + V_M} P_{d,N}$$

Par récurrence, on montre immédiatement que :

$$P_{d,N} = \left(\frac{V_0}{V_0 + V_M} \right)^N P_0$$

4. Par conservation de la quantité de matière en gaz :

$$n_{g,N} + n_{d,N} = n_{g,0} + n_{d,0} = \frac{2P_0 V_0}{RT_0} \implies n_{g,N} = \frac{2P_0 V_0}{RT_0} - n_{d,N}$$

On applique la loi de gaz parfait dans l'enceinte D après N aller-retours :

$$n_{d,N} = \left(\frac{V_0}{V_0 + V_M} \right)^N \frac{P_0 V_0}{RT_0}$$

On aboutit finalement à :

$$n_{g,N} = \left[2 - \left(\frac{V_0}{V_0 + V_M} \right)^N \right] \frac{P_0 V_0}{RT_0}$$

On applique la loi de gaz parfait dans l'enceinte G après N aller-retours :

$$P_{d,N} = \frac{n_{d,N} RT_0}{V_0} \iff P_{d,N} = \left[2 - \left(\frac{V_0}{V_0 + V_M} \right)^N \right] P_0$$

5. Dans la limite $N \rightarrow \infty$, $[P_{g,N} \rightarrow 2P_0]$ et $[P_{d,N} \rightarrow 0]$. On pouvait s'y attendre car après un nombre infini d'aller-retours, on vide totalement l'enceinte D pour remplir l'enceinte G. Dans cette dernière, la quantité de matière a alors doublé par rapport à l'état initial, donc la pression aussi car le volume et la température sont stationnaires.

6. Le clapet anti-retour qui sépare le réservoir de l'enceinte D ne s'ouvre que si la pression dans le réservoir devient inférieure à celle dans l'enceinte D. Il finit par ne plus s'ouvrir lorsque $P_{R,N+1} = P_{d,N}$ même lorsque le piston est tiré au maximum ($V_R = V_M$).

Le clapet anti-retour qui sépare le réservoir de l'enceinte G ne s'ouvre que si la pression dans le réservoir devient supérieure à celle dans l'enceinte G. Il finit par ne plus s'ouvrir lorsque $P_{R,N+1} = P_{g,N}$ même lorsque le piston est poussé au maximum ($V_R = V_m$).

Notons respectivement $n_{g,\infty}$, $n_{d,\infty}$ et $n_{R,\infty}$ les valeurs finales de la quantité de matière dans l'enceinte G, l'enceinte D et le réservoir. Elles vérifient les relations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{n_{R,\infty}}{V_M} = \frac{n_{d,\infty}}{V_0} & \text{(clapet de droite ne s'ouvre plus)} \\ \frac{n_{R,\infty}}{V_m} = \frac{n_{g,\infty}}{V_0} & \text{(clapet de gauche ne s'ouvre plus)} \\ n_{g,\infty} + n_{d,\infty} + n_{R,\infty} = \frac{2P_0 V_0}{RT_0} & \text{(conservation de la matière)} \end{cases}$$

La résolution de ce système aboutit à :

$$n_{g,\infty} = \frac{2P_0 V_0}{RT_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{V_m}{V_0} + \frac{V_m}{V_M}}$$

Une dernière loi des gaz parfaits dans l'enceinte G permet de calculer la pression maximale :

$$P_{g,\infty} = \frac{2P_0}{1 + \frac{V_m}{V_0} + \frac{V_m}{V_M}}$$