Devoir n°26 (non surveillé)

EXERCICE 1

On considère la suite d'intégrales $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1-x)^n e^{-x}dx$.

1) Étudier la monotonie de la suite (I_n). En déduire qu'elle est convergente.

2) Déterminer la limite de la suite (I_n) en majorant e^{-x} pour tout x de $[0,1]$.

3) À l'aide d'une intégration par parties, établir, pour tout entier naturel n, la relation $I_{n+1} = 1-(n+1)I_n$.

4) En déduire que $I_n \sim \dfrac{1}{n}$ au voisinage de $+\infty$.

5) Déterminer un équivalent de $I_n - \dfrac{1}{n}$ au voisinage de $+\infty$.

EXERCICE 2

On dit qu'une suite réelle (u_n) est périodique s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_{n+p} = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On dit alors que p est une période de (u_n) ou que (u_n) est p-périodique.

1) Montrer que les suites suivantes sont périodiques et donner sans justification leur plus petite période :

a) (u_n) où $u_n = (-1)^n$.

b) (v_n) où $v_n = \cos\dfrac{n\pi}{3}$.

c) (w_n) où w_n est le reste dans la division euclidienne de 2^n par 5.

d) (x_n) où $x_n = (-1)^{F_n}$ où (F_n) est la suite de Fibonacci : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des suites réelles périodiques et $\mathcal{P}_p$ l'ensemble des suites réelles p-périodiques.

a) Montrer que $\mathcal{P}$ est un espace vectoriel et que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_p$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}$.

b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathcal{P}_p$ est de dimension finie et en donner une base et la dimension. On commencera par étudier le cas $p = 1$, puis le cas $p = 2$ en regardant la forme générale d'un élément de $\mathcal{P}_2$.

c) Déterminer les coordonnées de chacune des suites de la question 1 dans la base de $\mathcal{P}_p$ trouvée à la question précédente, où p est la plus petite période de la suite considérée.

d) L'espace vectoriel $\mathcal{P}$ est-il de dimension finie ?

e) Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ avec $p \neq q$. Les sous-espaces $\mathcal{P}_p$ et $\mathcal{P}_q$ sont-ils en somme directe ?