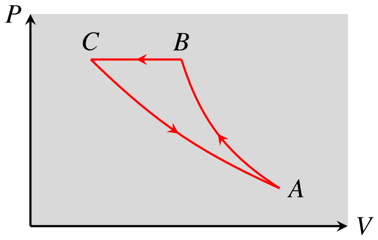
Corrigé DM7

Exercice 1 : Cycle d'un gaz parfait

1. On représente le cycle ci-dessous :



Le cycle est parcouru dans le sens trigonométrique, donc il est $\boxed{\text{récepteur}}$.

2. La transformation $A \to B$ est adiabatique réversible et le gaz est parfait donc on peut appliquer les **lois de Laplace** :

$$\begin{cases} P_A V_A^\gamma = P_B V_B^\gamma \\ P_A^{1-\gamma} T_A^\gamma = P_B^{1-\gamma} T_B^\gamma \end{cases} \iff \begin{cases} \boxed{V_B = \left(\frac{P_A}{P_B}\right)^{1/\gamma} V_A = 0,32\,\mathrm{L}} \\ \boxed{T_B = \left(\frac{P_A}{P_B}\right)^{(1-\gamma)/\gamma} T_A = 475\,\mathrm{K}} \end{cases}$$

Pour l'application numérique on a pris $\gamma = 1,4$ car le gaz parfait est diatomique.

La transformation $B \longrightarrow C$ est isobare donc $P_C = P_B$. La transformation $C \to A$ est isotherme donc :

$$P_C V_C = P_A V_A \iff \boxed{V_C = \frac{P_A}{P_C} V_A = \frac{P_A}{P_B} V_A = 0,20\,\mathrm{L}}$$

3. La transformation $A \to B$ est adiabatique donc $\boxed{Q_{AB} = 0}$.

La transformation $B \longrightarrow C$ est isobare. On applique le premier principe (il n'y a pas de travaux autres que ceux des forces de pression) :

$$Q_{BC} = \Delta H_{BC} = \frac{7}{2} nR(T_C - T_B)$$

On détermine la quantité de matière à l'aide de la loi des gaz parfaits (dans l'état B par exemple : $nR = \frac{P_B V_B}{T_B}$) :

$$\boxed{Q_{BC} = \frac{7}{2} P_B V_B \left(\frac{T_C}{T_B} - 1\right) = -204\,\mathrm{J}}$$

La transformation $C \to A$ est isotherme donc $\Delta U_{CA} = 0$. On applique le premier principe :

$$\Delta U_{CA} = 0 = W_{CA} + Q_{CA} \iff Q_{CA} = -W_{CA} = nRT_A \ln \frac{V_A}{V_C}$$

On utilise la loi des gaz parfaits dans l'état A :

$$\boxed{Q_{CA} = P_A V_A \ln \frac{V_A}{V_C} = 161\,\mathrm{J}}$$

4. On applique le premier principe sur un cycle :

$$\Delta U_{\text{cycle}} = 0 = W_{\text{cycle}} + Q_{\text{cycle}} = W_{\text{cycle}} + Q_{BC} + Q_{CA} \iff \boxed{W_{\text{cycle}} = -Q_{BC} - Q_{CA} = 43\,\mathrm{J}}$$

5. On applique le second principe sur un cycle :

$$\Delta S_{\text{cycle}} = 0 = S_e^{\text{cycle}} + S_c^{\text{cycle}} = S_e^{AB} + S_e^{BC} + S_e^{CA} + S_c^{\text{cycle}}$$

La transformation $A \longrightarrow B$ est adiabatique donc $S_e^{AB} = 0$. Au cours des transformations $B \to C$ et $C \to A$ le système est en contact thermique avec un thermostat de température T_A donc :

$$S_e^{BC} = \frac{Q_{BC}}{T_A} \quad \text{et} \quad S_e^{CA} = \frac{Q_{CA}}{T_A}$$

On en déduit finalement que :

$$S_c^{\text{cycle}} = -\frac{Q_{BC} + Q_{CA}}{T_A} \iff \boxed{S_c^{\text{cycle}} = \frac{W_{\text{cycle}}}{T_A} = 0,30\,\mathrm{J \cdot K^{-1}}}$$

Exercice 2 : Déplacement d'un piston par chauffage

1. Le piston étant en équilibre mécanique à l'état final, la pression P_f est la même dans les deux enceintes. Dans l'enceinte B la quantité de matière et la température se conservent (contact thermique initial et final avec le thermostat de température T_0).

$$P_0 V_0 = P_f V_{Bf} \quad (1)$$

Dans l'enceinte A seule la quantité de matière se conserve :

$$\frac{P_0 V_0}{T_0} = \frac{P_f V_{Af}}{T_1} \quad (2)$$

Le cylindre est indéformable donc $V_{Af} + V_{Bf} = 2V_0 \quad (3)$.

On résout ce système de trois équations à trois inconnues.

$$\frac{P_0 V_0}{P_f} + \frac{P_0 V_0 T_1}{P_f T_0} = 2V_0 \iff \boxed{P_f = \frac{T_1 + T_0}{2T_0} P_0 = 1,08\,\mathrm{bar}}$$

On détermine alors les volumes :

$$\boxed{V_{Bf} = \frac{2T_0}{T_1 + T_0} V_0 = 3,69\,\mathrm{L}} \quad \text{et} \quad \boxed{V_{Af} = \frac{2T_1}{T_1 + T_0} V_0 = 4,31\,\mathrm{L}}$$

2. La transformation du gaz en B est quasi-statique (on chauffe très lentement) et il est en contact thermique avec un thermostat donc la transformation du gaz en B est **isotherme** de température T_0. On en déduit alors que :

$$\boxed{W_2 = -n_B R T_0 \ln \frac{V_{Bf}}{V_0} = -P_0 V_0 \ln\left(\frac{2T_0}{T_1 + T_1}\right) = 32\,\mathrm{J}}$$

On applique le premier principe au gaz en B :

$$\Delta U_2 = 0 = W_2 + Q_2 \iff \boxed{Q_2 = -W_2 = -32\,\text{J}}$$

3. Les deux gaz s'échangent du travail par l'intermédiaire du piston. Comme le piston est immobile dans l'état initial et dans l'état final on peut dire que le travail W_1 algébriquement reçu par le gaz en A est égal au travail algébriquement fourni par le gaz en B, c'est-à-dire $-W_2$: $\boxed{W_1 = -W_2 = -32\,\text{J}}$.

On applique le premier principe au gaz en A. Il reçoit du travail à cause du déplacement du piston et il reçoit un transfert thermique de la part du résistor, par effet Joule :

$$\Delta U_1 = \frac{n_A R}{\gamma - 1}(T_1 - T_0) = W_1 + Q_1 \iff \boxed{Q_1 = \frac{P_0 V_0}{\gamma - 1}\left(\frac{T_1}{T_0} - 1\right) - W_1 = 254\,\text{J}}$$

La puissance électrique reçue par le résistor est constante : $\mathscr{P} = Ri^2$. On suppose que l'intégralité de cette puissance électrique est convertie en puissance thermique. Le transfert thermique reçu par le gaz en A pendant la durée τ vaut alors $Q_1 = Ri^2\tau$. On en déduit que :

$$\boxed{\tau = \frac{Q_1}{Ri^2} = 17\,\text{min}}$$

4. On applique le deuxième principe au système {résistance chauffante + gaz en A + gaz en B} :

$$\Delta S = S_e + S_c$$

Le système n'échange de l'entropie qu'avec le thermostat : $S_e = \frac{Q_2}{T_0}$. On écrit ensuite :

$$\Delta S = \Delta S_R + \Delta S_A + \Delta S_B$$

On néglige la capacité thermique du résistor donc $\Delta S_R = 0$. On obtient alors :

$$\Delta S = \frac{n_A R}{\gamma - 1}\ln\frac{T_1}{T_0} + n_A R \ln\frac{V_{Af}}{V_0} + n_B R \ln\frac{V_{Bf}}{V_0}$$

On conclut :

$$\boxed{S_c = \frac{P_0 V_0}{T_0}\left[\frac{1}{\gamma - 1}\ln\frac{T_1}{T_0} + \ln\left(\frac{4T_1 T_0}{(T_1 + T_0)^2}\right)\right] - \frac{Q_2}{T_0} = 0{,}78\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}}$$

Exercice 3 : Fuites thermiques d'un réfrigérateur

1. Un transfert thermique s'effectue spontanément du corps le plus chaud vers le corps le plus froid. Or ici l'intérieur du réfrigérateur est plus froid que l'air de la cuisine donc la puissance thermique $\mathscr{P}_{th}$ mesurée de l'extérieur vers l'intérieur du réfrigérateur est **positive**. Enfin puisque $T < T_\text{c}$ on en déduit que $\boxed{\lambda > 0}$.

2. Le transfert thermique infinitésimal reçu vaut $\boxed{\delta Q = \mathscr{P}_\text{th}\text{d}t}$.

3. On applique le premier principe à l'intérieur du réfrigérateur, entre t et $t + \text{d}t$. La transformation est **isobare** (équilibre mécanique permanent entre l'intérieur et l'extérieur du réfrigérateur) et le système ne reçoit aucun travail autre que ceux des forces de pression donc :

$$\begin{aligned}
\text{d}H = \delta Q &\iff C_P\text{d}T = \mathscr{P}_\text{th}\text{d}t \\
&\iff \frac{\text{d}T}{\text{d}t} = \frac{\lambda(T_\text{c} - T)}{C_P} \\
&\iff \boxed{\frac{\text{d}T}{\text{d}t} + \frac{\lambda}{C_P}T = \frac{\lambda}{C_P}T_\text{c}}
\end{aligned}$$

Par identification $\boxed{\tau = \frac{C_P}{\lambda}}$ et $\boxed{T_\infty = T_\text{c}}$.

4. On résout cette équation différentielle. La solution générale est :

$$T(t) = T_\text{c} + A\text{e}^{-t/\tau}$$

Avec la condition initiale $T(0) = T_\text{f}$ on obtient $\boxed{T(t) = T_\text{c} + (T_\text{f} - T_\text{c})\text{e}^{-t/\tau}}$

5. On lit la valeur de T_f à l'instant initial et celle de T_c au niveau de l'asymptote :

$$\boxed{T_\text{f} = 277\,\text{K}} \quad \text{et} \quad \boxed{T_\text{c} = 293\,\text{K}}$$

6. On exprime littéralement la grandeur en ordonnées :

$$\frac{T(t) - T_\text{c}}{T_\text{f} - T_\text{c}} = \text{e}^{-t/\tau} \iff \ln\left(\frac{T(t) - T_\text{c}}{T_\text{f} - T_\text{c}}\right) = -\frac{t}{\tau}$$

Le coefficient directeur de la droite tracée s'identifie à $-1/\tau$. On le mesure :

$$a = \frac{-5}{52 \times 3600} = -2{,}7 \cdot 10^{-5}\,\text{s}^{-1}$$

On en déduit la valeur de λ :

$$a = -\frac{1}{\tau} = -\frac{\lambda}{C_P} \iff \boxed{\lambda = -aC_P = 8{,}0\,\text{W}\cdot\text{K}^{-1}}$$

On détermine l'unité SI de λ par une analyse dimensionnelle de la relation $\mathscr{P}_\text{th} = \lambda(T_\text{c} - T)$.