Correction du DNS 28

EXERCICE 1

1) Soient $x, y \in]0, +\infty[$ tels que $x \leqslant y$. Alors pour tout $t \in [0,1]$ on a $x+t \leqslant y+t$, donc $\dfrac{1}{x+t} \geqslant \dfrac{1}{y+t}$ et $\dfrac{e^t}{x+t} \geqslant \dfrac{e^t}{y+t}$.
Ainsi, par croissance de l'intégrale, on a $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{x+t}dt \geqslant \int_0^1 \frac{e^t}{y+t}dt$, soit $f(x) \geqslant f(y)$: la fonction f est décroissante.

2) a) Soit $x \geqslant \dfrac{x_0}{2}$. Alors

$$f(x) - f(x_0) = \int_0^1 \frac{e^t}{x+t}dt - \int_0^1 \frac{e^t}{x_0+t}dt = \int_0^1 \left(\frac{e^t}{x+t} - \frac{e^t}{x_0+t}\right)dt = \int_0^1 \frac{e^t(x_0-x)}{(x+t)(x_0+t)}dt.$$

Par conséquent

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\int_0^1 \frac{e^t(x_0-x)}{(x+t)(x_0+t)}dt\right| \leqslant \int_0^1 \frac{e^t|x_0-x|}{(x+t)(x_0+t)}dt.$$

Or, pour tout $t \in [0,1]$, on a $e^t \leqslant e$ et $(x+t)(x_0+t) \geqslant xx_0 \geqslant \dfrac{x_0^2}{2}$, donc $\dfrac{e^t}{(x+t)(x_0+t)} \leqslant \dfrac{2e}{x_0^2}$, d'où

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \int_0^1 \frac{2e|x_0-x|}{x_0^2}dt = \frac{2e|x-x_0|}{x_0^2}.$$

b) Soit $x_0 \in]0, +\infty[$. On a $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{2e|x-x_0|}{x_0^2} = 0$, donc d'après la question précédente et le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{x\to x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$ (si x tend vers x_0 on peut considérer que $x \geqslant \dfrac{x_0}{2}$), et donc $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$: la fonction f est continue en x_0.

Comme elle est continue en tout point de $]0, +\infty[$, elle est continue sur $]0, +\infty[$.

3) a) Soit $x > 0$. Pour tout $t \in [0,1]$ on a $x \leqslant x+t \leqslant x+1$, donc $\dfrac{e^t}{x+1} \leqslant \dfrac{e^t}{x+t} \leqslant \dfrac{e^t}{x}$, d'où par croissance de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{e^t}{x+1}dt \leqslant \int_0^1 \frac{e^t}{x+t}dt \leqslant \int_0^1 \frac{e^t}{x}dt,$$

ce qui donne $\dfrac{e-1}{x+1} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{e-1}{x}$.

b) On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e-1}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e-1}{x} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Le théorème des gendarmes pour les équivalents donne même

$$f(x) \sim \frac{e-1}{x}$$

au voisinage de $+\infty$.

4) a) La fonction exponentielle est dérivable sur $[0,1]$ et la valeur absolue de sa dérivée est majorée par e sur cet intervalle donc d'après l'inégalité des accroissements finis on a $|e^t - 1| \leqslant e|t-0|$, soit $e^t - 1 \leqslant et$, pour tout $t \in [0,1]$.

b) Soit $x > 0$. On a

$$|g(x)| = \left|\int_0^1 \frac{e^t-1}{x+t}\,dt\right| \leqslant \int_0^1 \left|\frac{e^t-1}{x+t}\right| dt = \int_0^1 \frac{|e^t-1|}{x+t}\,dt \leqslant \int_0^1 \frac{et}{x+t}\,dt$$

d'après ce qui précède. Or pour tout $t \in [0,1]$ on a $x+t \geqslant t$ donc $\dfrac{et}{x+t} \leqslant \dfrac{et}{t} = e$ d'où

$$|g(x)| \leqslant \int_0^1 e\,dt = e.$$

La fonction g est bornée sur $]0, +\infty[$.

c) On voit que pour tout $x > 0$ on peut écrire

$$g(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{x+t}\,dt - \int_0^1 \frac{1}{x+t}\,dt = f(x) - [\ln(x+t)]_0^1 = f(x) - \ln(x+1) + \ln x.$$

Ainsi on a $f(x) = g(x) + \ln(x+1) - \ln x \sim -\ln x$ au voisinage de 0 puisque g est bornée et que $\ln(x+1)$ tend vers 0 alors que $-\ln x$ tend vers $+\infty$.

5) a) Pour le dessin voir le cours sur les sommes de Riemann : u_n et v_n représentent des sommes d'aires de rectangles (à gauche pour u_n et à droite pour v_n). La fonction h est continue sur $[0,1]$ donc les suites (u_n) et (v_n) tendent toutes deux vers $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{1+t}\,dt$ c'est-à-dire vers $f(1)$.

b) La fonction h est dérivable sur $[0,1]$ et pour tout $t \in [0,1]$ on a

$$h'(t) = \frac{e^t(1+t) - e^t}{(1+t)^2} = \frac{te^t}{(1+t)^2} \geqslant 0$$

donc la fonction h est croissante sur $[0,1]$.

c) Soit $k \in \{0, \dots, n-1\}$. La fonction h est croissante donc pour tout $t \in [k/n, (k+1)/n]$ on a $h(k/n) \leqslant h(t) \leqslant h((k+1)/n)$ d'où

$$\int_{k/n}^{(k+1)/n} h(k/n)\,dt \leqslant \int_{k/n}^{(k+1)/n} h(t)\,dt \leqslant \int_{k/n}^{(k+1)/n} h((k+1)/n)\,dt$$

qui donne l'encadrement demandé.

d) En sommant l'encadrement précédent pour k variant de 0 à $n-1$ on obtient

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} h\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} h(t)\,dt \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} h\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

qui donne $u_n \leqslant f(1) \leqslant v_n$ par la relation de Chasles. En retranchant $\dfrac{u_n+v_n}{2}$ à chaque membre de cet encadrement on obtient

$$\frac{u_n - v_n}{2} \leqslant f(1) - \frac{u_n+v_n}{2} \leqslant \frac{v_n - u_n}{2}.$$

Or par télescopage on voit que $v_n - u_n = \dfrac{h(1)-h(0)}{n}$ donc

$$-\frac{h(1)-h(0)}{2n} \leqslant f(1) - \frac{u_n+v_n}{2} \leqslant \frac{h(1)-h(0)}{2n}$$

qui donne bien

$$\left| f(1) - \frac{u_n+v_n}{2} \right| \leqslant \frac{h(1)-h(0)}{2n}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

e) D'après ce qui précède, pour que $\dfrac{u_n+v_n}{2}$ soit une valeur approchée de $f(1)$ à 10^{-1} près il suffit que $\dfrac{h(1)-h(0)}{2n}$ soit inférieur à 10^{-1}, ce qui équivaut à $n \geqslant 5(h(1)-h(0))$. Or $5(h(1)-h(0)) \approx 1{,}8$ donc on prend $n = 2$: on a $\dfrac{u_2+v_2}{2} = \dfrac{h(0)}{2} + h(1/2) + \dfrac{h(1)}{2} \approx 1{,}139$.

EXERCICE 2

1) Posons $g(t) = \dfrac{1}{\ln(1+t^2)}$ pour tout $t \neq 0$. Pour tout $x \neq 0$, l'intervalle $[x, 2x]$ (ou $[2x, x]$ si $x < 0$) ne contient pas 0, donc la fonction g est continue sur cet intervalle comme quotient de fonctions continues, et donc l'intégrale est bien définie. Par conséquent, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On effectue le changement de variables $u = -t$ dans $f(-x)$:

$$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{dt}{\ln(1+t^2)} = \int_x^{2x} \frac{-du}{\ln(1+(-u)^2)} = -\int_x^{2x} \frac{du}{\ln(1+u^2)} = -f(x)$$

donc la fonction f est impaire.

3) a) La fonction g est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, donc elle y admet des primitives. Soit G une primitive de g sur ces deux intervalles. Alors pour tout $x \neq 0$ on peut écrire

$$f(x) = [G(t)]_x^{2x} = G(2x) - G(x),$$

donc G est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2G'(2x) - G'(x) \\ &= 2g(2x) - g(x) \\ &= \frac{2}{\ln(1+4x^2)} - \frac{1}{\ln(1+x^2)}. \end{aligned}$$

b) Étudions le signe de $f'(x)$. On a

$$\begin{aligned} f'(x) \geqslant 0 &\Leftrightarrow \frac{2}{\ln(1+4x^2)} \geqslant \frac{1}{\ln(1+x^2)} \\ &\Leftrightarrow 2\ln(1+x^2) \geqslant \ln(1+4x^2) \\ &\Leftrightarrow \ln((1+x^2)^2) \geqslant \ln(1+4x^2) \\ &\Leftrightarrow (1+x^2)^2 \geqslant 1+4x^2 \\ &\Leftrightarrow x^4+2x^2+1 \geqslant 1+4x^2 \\ &\Leftrightarrow x^4-2x^2 \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow x^2-2 \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 \geqslant 2 \\ &\Leftrightarrow x \leqslant -\sqrt{2} \text{ ou } x \geqslant \sqrt{2}. \end{aligned}$$

La fonction f est donc strictement croissante sur $]-\infty, -\sqrt{2}]$ et sur $[\sqrt{2}, +\infty[$ et strictement décroissante sur $[-\sqrt{2}, 0[$ et sur $]0, \sqrt{2}]$.

4) a) Soit $x > 0$. Pour tout $t \in [x, 2x]$ on a $x^2 \leqslant t^2 \leqslant 4x^2$ donc

$$\frac{1}{\ln(1+4x^2)} \leqslant \frac{1}{\ln(1+t^2)} \leqslant \frac{1}{\ln(1+x^2)}$$

donc en intégrant entre x et $2x$ on obtient

$$\frac{x}{\ln(1+4x^2)} \leqslant f(x) \leqslant \frac{x}{\ln(1+x^2)}.$$

b) Au voisinage de $+\infty$ on a

$$\frac{x}{\ln(1+x^2)} \sim \frac{x}{\ln(x^2)} \sim \frac{x}{2\ln x}$$

et

$$\frac{x}{\ln(1+4x^2)} \sim \frac{x}{\ln(4x^2)} \sim \frac{x}{\ln 4 + 2\ln x} \sim \frac{x}{2\ln x}$$

donc par le théorème des gendarmes on a

$$f(x) \sim \frac{x}{2\ln x},$$

et par les croissances comparées

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

5) Posons $h(t) = \dfrac{1}{\ln(1+t^2)} - \dfrac{1}{t^2}$ pour tout $t \neq 0$. La fonction h est continue sur $\mathbb{R}^*$ et

$$h(t) = \frac{t^2 - \ln(1+t^2)}{t^2\ln(1+t^2)} \overset{0}{=} \frac{t^2 - (t^2 - t^4/2 + o(t^4))}{t^2\ln(1+t^2)} \overset{0}{=} \frac{t^4 + o(t^4)}{2t^2\ln(1+t^2)} \overset{0}{\sim} \frac{t^4}{2t^4} \overset{0}{\sim} \frac{1}{2}$$

donc h est prolongeable par continuité en 0 en posant $h(0) = 1/2$.

Soit donc H une primitive de h sur $\mathbb{R}$. On a $h(x) \overset{0}{=} \dfrac{1}{2} + o(1)$, donc $H(x) \overset{0}{=} \dfrac{x}{2} + o(x)$, d'où

$$\begin{aligned} \int_x^{2x} h(t)\,dt &= H(2x) - H(x) \\ &\overset{0}{=} x + o(x) - \Big(\frac{x}{2} + o(x)\Big) \\ &\overset{0}{=} \frac{x}{2} + o(x). \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\int_x^{2x} h(t)\,dt &= \int_x^{2x} \left(\frac{1}{\ln(1+t^2)} - \frac{1}{t^2}\right) dt \\ &= \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln(1+t^2)} - \int_x^{2x} \frac{dt}{t^2} \\ &= f(x) + \left[\frac{1}{t}\right]_x^{2x} \\ &= f(x) - \frac{1}{2x}\end{aligned}$$

donc finalement

$$f(x) \overset{0}{=} \frac{1}{2x} + \frac{x}{2} + o(x).$$