TD-1 : Méthodes mathématiques, trigonométrie

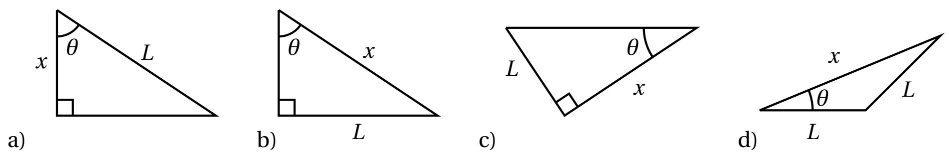
Exercice 1 : Calculs trigonométriques

Dans cet exercice, on demande de représenter les angles ci-dessous sur le cercle trigonométrique puis de calculer (de tête!) leur cosinus et leur sinus :

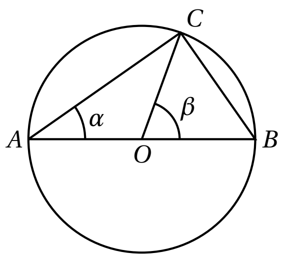
$$\text{a) } \frac{7\pi}{4} \quad \text{b) } \frac{14\pi}{3} \quad \text{c) } \frac{19\pi}{6} \quad \text{d) } \frac{30\pi}{4}$$

Exercice 2 : Fonctions trigonométriques

Dans chacune des figures ci-dessous, déterminer la longueur x en fonction de L et de θ.

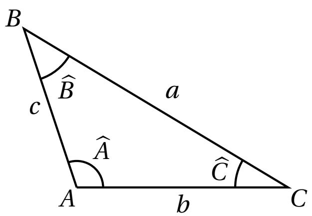


⋆ Exercice 3 : Angle au centre



AB est un diamètre du cercle. On note $\alpha = \widehat{BAC}$. Montrer que $\beta = \widehat{BOC} = 2\alpha$.

⋆ Exercice 4 : Relations dans un triangle



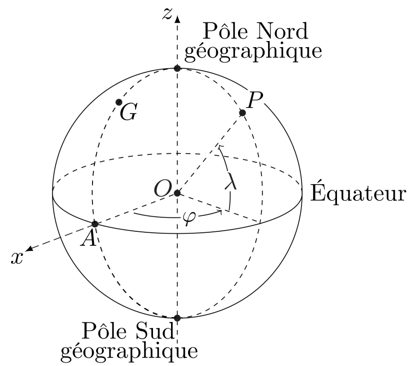
ABC est un triangle quelconque. Montrer que $\dfrac{\sin\hat{A}}{a} = \dfrac{\sin\hat{B}}{b} = \dfrac{\sin\hat{C}}{c}$.

⋆ Exercice 5 : Système d'équations

Résoudre le système d'équations suivantes : $\begin{cases} 2x+3y+z=6 \\ x-y-2z=3 \\ 4x+6y-3z=22 \end{cases}$.

⋆ Exercice 6 : Voyages à la surface de la Terre

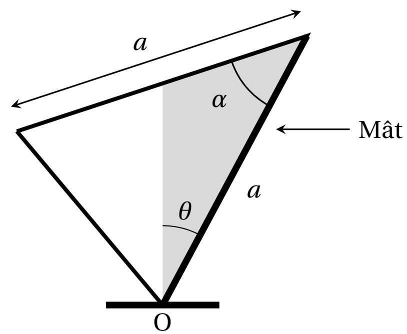
On assimile la Terre à une sphère de rayon $R_T = 6{,}4 \cdot 10^3\,\text{km}$. La latitude λ d'un point P de la surface de la Terre désigne la position angulaire de P mesurée par rapport à l'équateur. Par convention la latitude est positive dans l'hémisphère nord et négative dans l'hémisphère sud. La longitude φ mesure la position angulaire de P mesurée par rapport au méridien de Greenwich (méridien passant par la ville anglaise de Greenwich symbolisée par le point G sur la figure ci-contre). Par convention la longitude est positive à l'est de ce méridien et négative à l'ouest.



Une personne se trouve à Amiens (latitude : $\lambda = 49{,}9°$, longitude : $\varphi = 2{,}3°$). Elle entame un voyage en se déplaçant dans la direction d'un méridien (longitude constante). Quelle distance a-t-elle parcouru quand elle revient à son point de départ ? Même question si elle voyage en suivant un parallèle (latitude constante).

⋆⋆ Exercice 7 : Planche à voile

On modélise la voile d'une planche à voile par un triangle isocèle plein de surface S, dont l'un des deux côtés de longueur identique a constitue le mât de la voile. L'angle au sommet symétrique du triangle isocèle est appelé α. Le mât de la voile fait un angle θ avec la verticale, que le ou la véliplanchiste peut modifier en faisant pivoter le mât autour du point O.



1. Établir l'expression de S en fonction de α.

2. Établir l'expression de la surface S' de la voile située à droite de la verticale et représentée en grisé sur la figure ci-contre. On exprimera S' en fonction de a, α et θ.

3. Montrer que la verticale sépare la voile en deux parties de surfaces égales à condition que l'angle θ vérifie :

$$\tan\theta = \frac{\sin\alpha}{2-\cos\alpha}$$

TD-1 : Méthodes mathématiques, trigonométrie

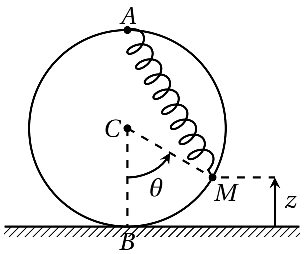
⋆ Exercice 8 : Observation des sylphes

Les sylphes sont des émissions lumineuses rouges, très intenses et relativement brèves (de l'ordre de quelques centaines de millisecondes) qui se produisent entre le sommet des nuages et l'ionosphère. La majorité d'entre-elles se situe entre 40 et 80 km d'altitude. Elles ne sont observées et étudiées que depuis 1990 environ. Certaines de leurs manifestations avaient déjà été rapportées bien avant mais leur observation depuis la Terre est difficile. Malgré cette difficulté, des sylphes ont été vues au-dessus des Alpes depuis l'Observatoire du Pic du Midi de Bigorre, situé à une distance d'environ $d = 500\,\text{km}$ à vol d'oiseau.

Sans prendre en compte l'altitude du Pic du Midi de Bigorre, tracer sur un schéma approprié la ligne d'horizon qui en part et qui passe au dessus des Alpes à une altitude h. En tenant compte du fait que $h \ll R_T$ exprimer h en fonction du rayon de la Terre R_T et d et calculer sa valeur numérique. Est-il possible de voir des sylphes alpins sans effet de réfraction atmosphérique depuis le Pic du Midi de Bigorre ? Peut-on voir le Mont-Blanc par beau temps ?

Donnée : $R_T = 6,4 \cdot 10^3\,\text{km}$.

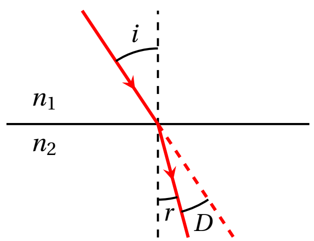
⋆ Exercice 9 : Anneau sur un cercle



Un anneau, assimilé à un point M, peut se déplacer sur un rail circulaire de rayon R, situé dans un plan vertical. Cet anneau est accroché à un ressort élastique dont l'autre extrémité est fixée au sommet A du cercle. On note z l'altitude de l'anneau, mesurée à partir du point le plus bas du cercle (point B).
La position de l'anneau sur le cercle est repérée par l'angle θ, mesuré par rapport à la verticale descendante.

1. Déterminer l'altitude z de l'anneau en fonction de R et θ.
2. Exprimer la longueur $\ell = AM$ du ressort en fonction de R et θ.

⋆⋆ Exercice 10 : Loi de Descartes



En optique, la loi de Descartes permet de déterminer la déviation d'un rayon lumineux, lorsque celui-ci traverse un dioptre qui sépare deux milieux transparents d'indices de réfraction différents. Dans le cas où un rayon passe d'un milieu d'indice n_1 à un milieu d'indice $n_2 > n_1$, les directions du rayon incident et du rayon réfracté (mesurées par rapport à la normale au point d'incidence, voir le schéma), vérifient l'équation $n_1 \sin i = n_2 \sin r$.

On veut que le rayon lumineux soit dévié d'un angle D donné à la traversée du dioptre. Calculer la valeur de l'angle i à choisir.

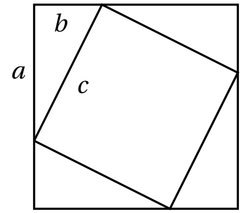
AN : $D = 5°$, $n_1 = 1$, $n_2 = 1,33$.

⋆ Exercice 11 : Résolution d'une équation par méthode graphique

Dans cet exercice on cherche des informations sur les solutions de l'équation $\sin\theta = K\theta$, sur l'intervalle $\theta \in]-\pi,\pi]$ (K est un réel strictement positif).

1. Déterminer une solution évidente de cette équation.
2. Tracer le graphe de la fonction $\theta \mapsto \sin\theta$ sur l'intervalle $]-\pi,\pi]$. Sur la même figure tracer le graphe de la fonction $\theta \mapsto K\theta$, pour $K < 1$ puis $K \geq 1$.
3. Justifier, à partir de la figure tracée à la question précédente, que le nombre de solutions de l'équation $\sin\theta = K\theta$ dépend de la valeur de K. Donner dans chaque cas le nombre de solutions, en les situant sur le graphe.

⋆ Exercice 12 : Théorème de Pythagore



En vous appuyant sur la figure ci-contre, démontrer le théorème de Pythagore. Pour cela vous pouvez chercher deux manières différentes d'exprimer l'aire du grand carré.

Solutions

Ex1 : a) $\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, b) $\cos\left(\frac{14\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$, $\sin\left(\frac{14\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
c) $\cos\left(\frac{19\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\left(\frac{19\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$, d) $\cos\left(\frac{30\pi}{4}\right) = 0$, $\sin\left(\frac{30\pi}{4}\right) = -1$

Ex2 : a) $x = L\cos\theta$, b) $x = \frac{L}{\sin\theta}$, c) $x = \frac{L}{\tan\theta}$, d) $x = 2L\cos\theta$

Ex3 : $\beta = 2\alpha$ **Ex5** : $x = 1$, $y = 2$, $z = -2$

Ex6 : Longitude constante : $L = 4,0 \cdot 10^4\,\text{km}$.
Latitude constante : $L = 2,6 \cdot 10^4\,\text{km}$.

Ex7 : 1. $S = \frac{a^2}{2}\sin\alpha$ 2. $S' = \frac{a^2}{2\,(\text{cotan}\,\alpha + \text{cotan}\,\theta)}$ **Ex8** : $h = 20\,\text{km}$

Ex9 : 1. $z = R\,(1 - \cos\theta)$ 2. $\ell = R\cos\frac{\theta}{2}$ **Ex10** : $i = 19,6°$