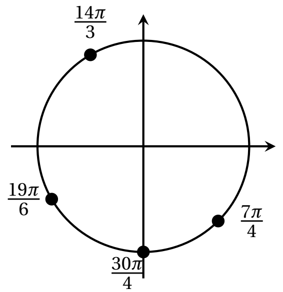
TD-1 : Méthodes mathématiques, trigonométrie - corrigé

Exercice 1 : Calculs trigonométriques

On représente ci-dessous les différentes position angulaires mais d'abord, on simplifie en ramenant l'angle dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$ par rotation d'une valeur multiple de 2π.

$$\frac{7\pi}{4} - 2\pi = -\frac{\pi}{4} \quad , \quad \frac{14\pi}{3} - 4\pi = \frac{2\pi}{3} \quad , \quad \frac{19\pi}{6} - 4\pi = -\frac{5\pi}{6} \quad , \quad \frac{30\pi}{4} - 8\pi = -\frac{\pi}{2}$$



Exercice 2 : Fonctions trigonométriques

a) $\cos\theta = \frac{x}{L} \iff \boxed{x = L\cos\theta}$. b) $\sin\theta = \frac{L}{x} \iff \boxed{x = \dfrac{L}{\sin\theta}}$. c) $\tan\theta = \frac{L}{x} \iff \boxed{x = \dfrac{L}{\tan\theta}}$.

d) Après avoir tracé la hauteur issue du sommet opposé à x, on voit rapidement que $\boxed{x = 2L\cos\theta}$.

⋆ Exercice 3 : Angle au centre

AOC est isocèle en O donc $\widehat{ACO} = \widehat{CAO} = \alpha$. On voit rapidement que $\widehat{AOC} = \pi - \beta$. En sommant les angles du triangle AOC, on obtient :

$$\alpha + \alpha + \pi - \beta = \pi \iff \boxed{\beta = 2\alpha}$$

⋆ Exercice 4 : Relations dans un triangle

La hauteur issue de A a pour longueur $c\sin\widehat{B}$ mais également $b\sin\widehat{C}$. On en déduit que $\frac{\sin\widehat{B}}{b} = \frac{\sin\widehat{C}}{c}$. On obtient la dernière égalité de la même manière, en traçant la hauteur issue de B (ou de C).

⋆ Exercice 5 : Système d'équations

Par souci de clarté, on commence par numéroter les équations : $\begin{cases} 2x + 3y + z = 6 & (1) \\ x - y - 2z = 3 & (2) \\ 4x + 6y - 3z = 22 & (3) \end{cases}$.

On remarque qu'en écrivant $2 \times (1) - (3)$, on élimine d'un seul coup les variables x et y :

$$5z = -10 \iff \boxed{z = -2}$$

Il reste ensuite un système 2×2 à résoudre :

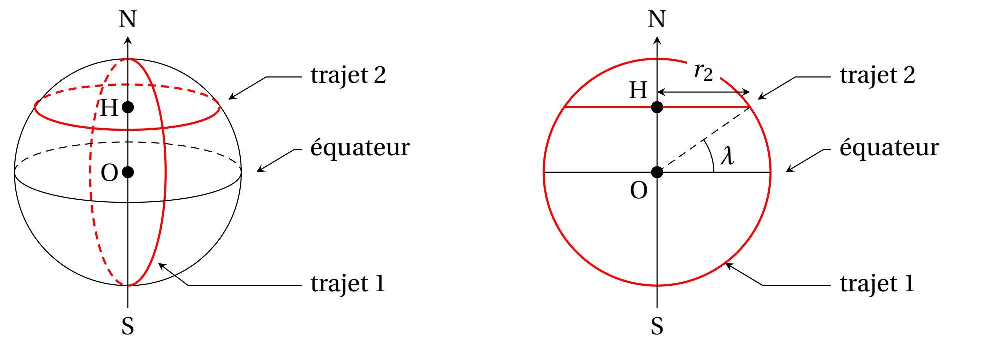
$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 & (1) \\ x - y = -1 & (2) \end{cases}$$

En écrivant $(1) + 3 \times (2)$, on élimine y : $5x = 5 \iff \boxed{x = 1}$

Finalement, on obtient : $3y = 6 \iff \boxed{y = 2}$

⋆ Exercice 6 : Voyages à la surface de la Terre

On représente sur le schéma ci-dessous les deux trajets suivis (suivant un mérifien et suivant un parallèle) selon une vue en perspective (à gauche) et une vue de profil (à droite).



Le trajet 1 (longitude constante) est un cercle centré sur le centre O de la Terre. La distance parcourue est donc $\boxed{L_1 = 2\pi R_T = 4{,}0 \cdot 10^4\,\text{km}}$.

Le trajet 2 (latitude constante) est un cerle centré sur H, projeté d'un point situé à la latitude d'Amiens sur l'axe des pôles. Le rayon de ce parcours est $r_2 = R_T \cos\lambda$. On en déduit que la distance parcourue vaut $\boxed{L_2 = 2\pi R_T \cos\lambda = 2{,}6 \cdot 10^3\,\text{km}}$.

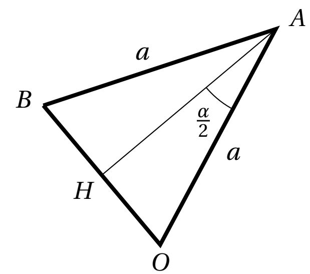
⋆⋆ Exercice 7 : Planche à voile

1. On calcule la hauteur issue du sommet symétrique A ainsi que la base OB :

$$AH = a\cos\frac{\alpha}{2} \quad \text{et} \quad OB = 2a\sin\frac{\alpha}{2}$$

On en déduit l'expression de la surface S :

$$S = \frac{AH \times OB}{2} = a^2 \cos\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\alpha}{2} \iff \boxed{S = \frac{a^2}{2}\sin\alpha}$$



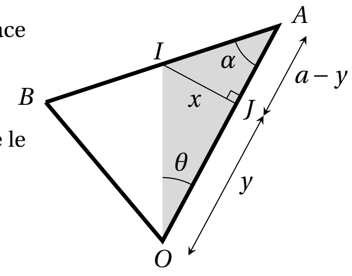
TD-1 : Méthodes mathématiques, trigonométrie - corrigé

2. Avec les notations introduites sur le schéma ci-contre, la surface du triangle OIA s'écrit :

$$S' = \frac{ax}{2}$$

Pour déterminer la mesure x de la hauteur issue de I, on utilise le fait que celle-ci est commune aux triangles OIJ et AIJ :

$$x = y\tan\theta = (a-y)\tan\alpha$$



On détermine alors l'expression de y, puis celle de x :

$$y = \frac{a\tan\alpha}{\tan\alpha+\tan\theta} \quad \text{et} \quad x = \frac{a\tan\alpha\tan\theta}{\tan\alpha+\tan\theta} = \frac{a}{\text{cotan}\alpha+\text{cotan}\theta}$$

On obtient finalement :

$$\boxed{S' = \frac{a^2}{2(\text{cotan}\alpha+\text{cotan}\theta)}}$$

3. La surface S' est égale à la moitié de la surface totale S de la voile à condition que :

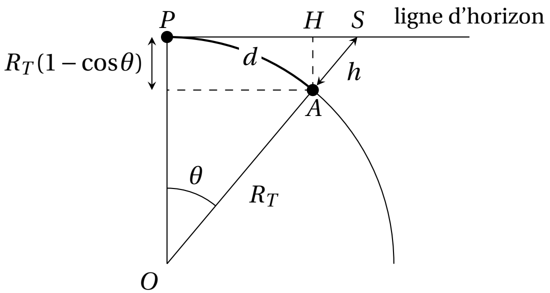
$$\frac{S}{S'} = \sin\alpha(\text{cotan}\alpha+\text{cotan}\theta) = 2 \iff \cos\alpha+\sin\alpha\,\text{cotan}\theta = 2$$

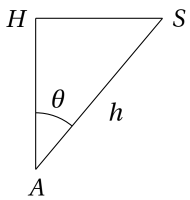
$$\iff \text{cotan}\theta = \frac{2-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\iff \boxed{\tan\theta = \frac{\sin\alpha}{2-\cos\alpha}}$$

⋆ Exercice 8 : Observation des sylphes

1. On modélise la Terre par une sphère parfaitement lisse de rayon R_T. On représente schématiquement la position du Pic de Midi de Bigorre (point P) avec la ligne d'horizon qui en part, ainsi que la position d'un point situé dans la chaîne des Alpes (point A). Le schéma n'est pas représenté à l'échelle pour plus de clarté. On fait également un zoom sur le triangle rectangle AHS.





On note θ l'écart angulaire, mesuré depuis le centre de la Terre, entre P et A. Sachant que la distance d est celle de l'arc qui sépare ces deux points, on en déduit que $\theta = d/R_T$. Dans le triangle AHS rectangle en H, on peut écrire :

$$h = \frac{AH}{\cos\theta} = \frac{R_T(1-\cos\theta)}{\cos\theta} \iff \boxed{h = R_T\frac{1-\cos(d/R_T)}{\cos(d/R_T)}}$$

L'application numérique donne : $\boxed{h = 20\,\text{km}}$. Depuis le Pic du Midi de Bigorre, sans réfraction atmosphérique, la portion de l'espace située à la verticale du massif alpin n'est visible qu'au-delà de 20 km d'altitude. Les sylphes se produisant au-dessus de 40 km d'altitude et le sommet du Mont-Blanc étant situé à environ 5 km d'altitude, **il est possible d'observer des sylphes alpins mais pas le Mont-Blanc**.

⋆⋆ Exercice 9 : Anneau sur un cercle

1. Notons H le projeté orthogonal de M sur le segment $[CB]$. On a $CH = CM\cos\theta = R\cos\theta$. Par ailleurs :

$$z = BH = BC - CH = R - R\cos\theta \iff \boxed{z = R(1-\cos\theta)}$$

2. On note H le projeté orthogonal de M sur le segment CB et on applique le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle AHM :

$$\begin{aligned}\ell^2 = AH^2 + HM^2 = (AC+CH)^2 + HM^2 &= (R+R\cos\theta)^2 + (R\sin\theta)^2 \\ &= R^2\left(1+2\cos\theta+\underbrace{\cos^2\theta+\sin^2\theta}_{=1}\right) \\ &= \boxed{2R^2(1+\cos\theta)}\end{aligned}$$

⋆⋆ Exercice 10 : Loi de Descartes

Le problème consiste à déterminer, connaissant la relation entre l'angle d'incidence i et l'angle de réfraction r, la valeur de i qui permet d'obtenir une déviation D donnée.
On remarque tout d'abord que $i = D + r \iff r = i - D$. La condition vérifiée par l'angle i est donc :

$$n_1\sin i = n_2\sin(i-D)$$

À partir de cette équation, notre objectif est d'isoler i et de l'exprimer en fonction de D, n_1 et n_2. On peut commencer par utiliser la relation trigonométrique suivante :

$$n_1\sin i = n_2\sin(i-D) = n_2(\sin i\cos D - \cos i\sin D)$$

Après factorisation, on obtient :

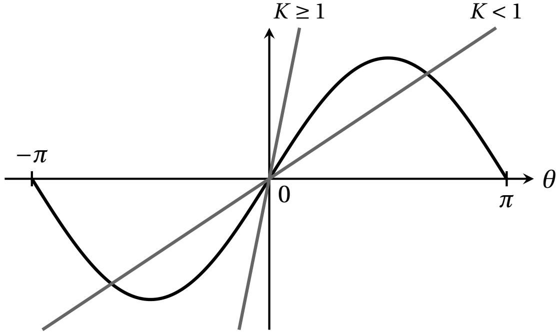
$$\sin i\,(n_2\cos D - n_1) = n_2\sin D\cos i \iff \boxed{\tan i = \frac{n_2\sin D}{n_2\cos D - n_1}}$$

L'application numérique donne $\boxed{i = 19{,}6°}$.

⋆ Exercice 11 : Résolution d'une équation par méthode graphique

1. Une solution évidente de l'équation est $\boxed{\theta = 0}$.

2.

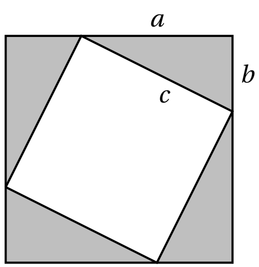


3. Dans le cas où $K \geq 1$, il n'y a aucune autre valeur que $\theta = 0$ pour laquelle $\sin\theta = K\theta$. $\theta = 0$ **est donc la seule solution de l'équation**.
En revanche, dans le cas où $K < 1$, on constate qu'**il existe, dans l'intervalle** $]-\pi, \pi]$**, en plus de** $\theta = 0$, **deux solutions non triviales (c'est-à-dire non nulles), opposées l'une à l'autre**.

⋆ Exercice 12 : Théorème de Pythagore

Dans un premier temps, on annote la figure pour introduire les grandeurs utiles (voir ci-après).

Le carré extérieur a pour aire : $(a+b)^2$.
Le carré intérieur a pour aire : c^2.
Chaque triangle grisé a pour aire : $\frac{ab}{2}$.



Le carré extérieur contient exactement le carré intérieur et les quatre triangles grisés, d'où :

$$(a+b)^2 = c^2 + 4 \times \frac{ab}{2} \iff a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab \iff \boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$