Chapitre 1

NOTIONS DE LOGIQUE

I Notions de logique

1 Quantificateurs

Une **proposition** (ou **assertion**) est un énoncé mathématique qui est soit vrai, soit faux. Les quantificateurs sont des symboles servant à formuler des propositions. Il y en a deux :

– le quantificateur universel, noté $\forall$, qui signifie « pour tout » ou « quel que soit »,

– le quantificateur existentiel, noté $\exists$, qui signifie « il existe » (et $\exists\,!$ signifie « il existe un unique »).

Exemples :

– $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant x+1$ se lit « pour tout réel x on a $x^2 \geqslant x+1$ » (ce qui est faux : par exemple pour $x=0$ cela ne marche pas).

– $\exists\, x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant x+1$ se lit « il existe un réel x tel que $x^2 \geqslant x+1$ » (ce qui est vrai : on peut prendre par exemple $x=2$).

– $\exists\,!\, x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant x+1$ se lit « il existe un unique réel x tel que $x^2 \geqslant x+1$ » (ce qui est faux : il y a plusieurs valeurs de x qui conviennent, par exemple $x=2$ ou $x=3$).

Remarques :

1) On n'utilisera *jamais* ces quantificateurs en guise d'abréviations dans une phrase en français.

2) On peut permuter deux quantificateurs $\forall$ ou deux quantificateurs $\exists$, mais on ne peut pas permuter un $\forall$ et un $\exists$. Ainsi la proposition $(\forall\, x \in \mathbb{R}, \exists\, y \in \mathbb{R}, y \geqslant x)$ est vraie, mais la proposition $(\exists\, y \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathbb{R}, y \geqslant x)$ est fausse.

Exercice 1 Écrire à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

1) Le carré d'un réel est toujours positif.

2) L'équation $\cos x = x$ admet une unique solution réelle.

3) Dans tout sous-ensemble de $\mathbb{N}$ il existe un élément qui est plus petit que les autres (on note $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ l'ensemble des sous-ensembles de $\mathbb{N}$).

Exercice 2 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1) $\forall\, x \in [-1,1],\ 1-x^2 \in [0,1]$.

2) $\forall\, x \in [0,1],\ 5x^2-4x \in [0,1]$.

3) $\exists\, x \in [0,1],\ 5x^2-4x \in [0,1]$.

4) $\exists\, x \in [0,1],\ x^2-x > 0$.

2 Conjonction, disjonction, négation, implication, équivalence

Définition 1 *Soient P et Q deux propositions.*

(i) La proposition P et Q est vraie si P et Q sont toutes les deux vraies, et fausse sinon.

(ii) La proposition P ou Q est vraie si l'une au moins des propositions P et Q est vraie, et fausse sinon.

(iii) La proposition non P est vraie si la proposition P est fausse, et fausse si P est vraie.

(iv) La proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie si P est fausse ou que P et Q sont vraies, et fausse sinon.

(v) La proposition $P \Leftrightarrow Q$ est vraie si P et Q sont toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses, et fausse sinon.

On peut résumer ces définitions à l'aide d'une table de vérité :

P	Q	P et Q	P ou Q	non P	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	F	F
F	V	F	V	V	V	F
F	F	F	F	V	V	V

Remarques :

1) Si l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie, on dit que P implique Q, ou que P est une **condition suffisante** pour Q, ou que Q est une **condition nécessaire** pour P.

2) **L'implication réciproque** de l'implication $P \Rightarrow Q$ est l'implication $Q \Rightarrow P$. Si une implication est vraie, sa réciproque ne l'est pas forcément. Par exemple, la proposition « Toute fonction dérivable est continue » est vraie, mais sa réciproque « Toute fonction continue est dérivable » est fausse.

3) En français l'équivalence s'exprime par la locution **si et seulement si** : un triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $AB^2 + AC^2 = BC^2$. Pour traduire le fait que P et Q sont équivalentes, on peut également dire que P est une **condition nécessaire et suffisante** pour Q.

4) Pour démontrer que deux propositions P et Q sont équivalentes, on peut soit raisonner par équivalences successives, soit démontrer séparément les deux implications $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$.

5) Pour démontrer une succession d'équivalences $P_1 \Leftrightarrow P_2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow P_n$, il suffit de démontrer les implications $P_1 \Rightarrow P_2$, $P_2 \Rightarrow P_3$, ..., $P_{n-1} \Rightarrow P_n$ et $P_n \Rightarrow P_1$.

6) Le ou mathématique est un ou inclusif. En pratique, pour montrer qu'une proposition de la forme (P ou Q) est vraie, on supposera que l'une des propositions est fausse et on montrera qu'alors l'autre est forcément vraie.

7) La négation de (P ou Q) est (non P et non Q), celle de (P et Q) est (non P ou non Q), celle de ($P \Rightarrow Q$) est (P et non Q), et si $P(x)$ est une proposition qui dépend de x, la négation de ($\exists\, x$, $P(x)$) est ($\forall\, x$, non $P(x)$) et celle de ($\forall\, x, P(x)$) est ($\exists\, x$, non $P(x)$).

8) Ne pas confondre « il faut » et « il suffit ». Par exemple, si x est un réel, la proposition « pour que x^2 soit égal à 4, il suffit que x soit égal à 2 » est vraie, alors que la proposition « pour que x^2 soit égal à 4, il faut que x soit égal à 2 » est fausse. Pour exprimer une équivalence, on peut utiliser l'expression « il faut et il suffit ». Exemple : pour que x^2 soit égal à 4, il faut et il suffit que x soit égal à 2 ou -2.

Exercice 3 Soient x et y deux réels. Montrer que $x^2 = y^2$ si et seulement si $x = y$ ou $x = -y$.

Exercice 4 Écrire la négation des propositions suivantes :

1) $\forall\, x \in \mathbb{R}, \exists\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant x$.

2) $\forall\, x \in \mathbb{R}, (x^2 = 4 \Rightarrow x = 2)$.

3) $\forall\, A \in \mathbb{R}, \exists\, B \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathbb{R}, (x \geqslant B \Rightarrow e^x \geqslant A)$.

4) Toute fonction continue est dérivable.

Exercice 5 Remplacer les ... par $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ ou $\Leftrightarrow$ de manière à obtenir une proposition vraie.

1) $\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \in \mathbb{R}, (x = 0 \text{ et } y = 0) \ \ldots \ xy = 0$.

2) $\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \in \mathbb{R}, (x = 0 \text{ ou } y = 0) \ \ldots \ xy = 0$.

3) $\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \in \mathbb{R}, (x \neq 0 \text{ et } y \neq 0) \ \ldots \ xy \neq 0$.

4) $\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \in \mathbb{R}, (x \neq 0 \text{ ou } y \neq 0) \ \ldots \ xy \neq 0$.

II Modes de raisonnement

1 Implication

Pour établir une implication, on commencera toujours par bien écrire ce qu'on suppose vrai (et éventuellement ce qu'on veut alors montrer).

Exemple : Soit n un entier naturel. Montrer que si n est pair, alors n^2 est pair.

Démonstration : Supposons que n est pair. Il existe donc un entier naturel k tel que $n = 2k$. Alors $n^2 = 4k^2$ donc n^2 est pair. $\square$

2 Forme contraposée

Définition 2 *La* **forme contraposée** *de l'implication* $P \Rightarrow Q$ *est l'implication* $(\text{non } Q) \Rightarrow (\text{non } P)$.

Une implication et sa forme contraposée sont équivalentes (pour le voir, il suffit d'écrire leurs tables de vérité).

Exemple : Soit ABC un triangle. Le théorème de Pythagore dit que si ABC est rectangle en A, alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$. Sa forme contraposée dit que si $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$, alors ABC n'est pas rectangle en A.

Pour démontrer une proposition, il est parfois plus simple de démontrer sa contraposée. On dit alors qu'on raisonne par **contraposition**.

Exemple : Soit n un entier naturel. Montrer que si n^2 est pair, alors n est pair.

Démonstration :

Montrer directement cette implication ne semble pas évident : si on commence en écrivant qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n^2 = 2k$, on ne voit pas comment continuer.

On va donc essayer de démontrer la contraposée de cette implication, c'est-à-dire montrer que si n est impair, alors n^2 aussi.

Supposons donc que n est impair. Il existe alors un entier naturel k tel que $n = 2k+1$. Alors $n^2 = 4k^2 + 4k + 1$ donc n^2 est impair.

Conclusion : l'implication de départ (si n^2 est pair, alors n est pair) est vraie aussi. $\square$

Noter qu'avec l'exemple du paragraphe précédent on a en fait démontré une équivalence : un entier naturel est pair si et seulement son carré est pair.

3 Raisonnement par disjonction des cas

Pour démontrer une proposition, on la décompose parfois en plusieurs cas (ou sous-propositions) que l'on démontre de manière indépendante. On utilise fréquemment ce type de raisonnement quand la proposition dépend d'un paramètre (par exemple si ce paramètre est un réel, on peut séparer les cas positif et négatif ; s'il s'agit d'un entier on peut séparer les cas pair et impair, etc.).

Exemple : Montrer que pour tout entier n, $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est un entier.

Démonstration :

Soit n un entier. On va distinguer les cas n pair et n impair.

Si n est pair, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$. Alors
$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2k(2k+1)}{2} = k(2k+1)$$
donc $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est un entier.

Si n est impair, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k+1$. Alors
$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(2k+1)(2k+2)}{2} = (2k+1)(k+1)$$
donc $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est un entier.

Ainsi, dans tous les cas, $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est un entier. $\square$

On sera également amené à distinguer des cas lors de la résolution de certaines équations, en particulier celles qui contiennent des racines carrées ou des valeurs absolues.

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x-1| + |x+4| = 9$.

Soit x un réel. On voit que $x-1$ est positif si et seulement si $x \geqslant 1$ et que $x+4$ est positif si et seulement si $x \geqslant -4$. On va donc distinguer trois cas :

Si $x \leqslant -4$, alors $x - 1 \leqslant 0$ et $x + 4 \leqslant 0$, donc :
$$|x-1| + |x+4| = 9 \Leftrightarrow -x+1+(-x-4) = 9 \Leftrightarrow -2x = 12 \Leftrightarrow x = -6.$$
Si $-4 < x \leqslant 1$, alors $x - 1 \leqslant 0$ et $x + 4 \geqslant 0$, donc :
$$|x-1| + |x+4| = 9 \Leftrightarrow -x+1+x+4 = 9 \Leftrightarrow 5 = 9.$$
Si $x > 1$, alors $x - 1 \geqslant 0$ et $x + 4 \leqslant 0$, donc :
$$|x-1| + |x+4| = 9 \Leftrightarrow x-1+x+4 = 9 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3.$$
L'équation a donc deux solutions : -6 et 3.

4 Raisonnement par l'absurde

Pour démontrer qu'une proposition est vraie, on peut supposer qu'elle est fausse et montrer que cela entraîne une contradiction. Voici un exemple typique :

Proposition 1 $\sqrt{2}$ *est irrationnel.*

Démonstration :
On raisonne par l'absurde : on suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel. On peut donc l'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$, avec $p, q \in \mathbb{N}^*$. On peut supposer également que cette fraction est irréductible, i.e. que p et q sont premiers entre eux.
L'égalité $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ implique que $p = q\sqrt{2}$, et donc que $p^2 = 2q^2$. Par conséquent, p^2 est un nombre pair. On en déduit que p est pair également (cf paragraphe 2). On peut donc poser $p = 2p'$ avec $p' \in \mathbb{N}$. L'égalité $p^2 = 2q^2$ devient alors $4p'^2 = 2q^2$, soit $q^2 = 2p'^2$. Ainsi q^2 est pair, et donc q aussi.
Mais on a supposé que la fraction $\frac{p}{q}$ était irréductible. p et q ne peuvent donc pas être tous les deux pairs.
En supposant que $\sqrt{2}$ était rationnel on a obtenu une contradiction : $\sqrt{2}$ est donc irrationnel. □

Exercice 6 Soit n un entier naturel non nul. Montrer que $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas un entier.

5 Raisonnement par récurrence

• Le théorème de récurrence

Le raisonnement par récurrence est un type de raisonnement utilisé pour démontrer une propriété qui dépend d'un entier naturel. Il repose sur le théorème suivant, que l'on admet pour l'instant :

Théorème 2 *Soit $P(n)$ une propriété qui dépend d'un entier naturel n. Si $P(0)$ est vraie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ implique $P(n+1)$, alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Le principe du raisonnement par récurrence est donc le suivant :

– On établit la propriété à démontrer pour $n = 0$ (c'est **l'initialisation** de la récurrence).

– On suppose la propriété vraie à un certain rang n (c'est **l'hypothèse de récurrence**), et on montre qu'alors elle est vraie au rang $n+1$ (on dit que la propriété est **héréditaire**).

Le théorème de récurrence permet alors de conclure que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

L'idée est que si la propriété est vraie pour $n = 0$, alors par hérédité elle l'est aussi pour $n = 1$, puis, toujours par hérédité, pour $n = 2$, et ainsi de suite.

Exercice 7 Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $0 + 1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

On peut commencer à un autre rang que 0. Le théorème correspondant est alors :

Théorème 3 *Soit $P(n)$ une propriété qui dépend d'un entier naturel n. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Si $P(n_0)$ est vraie et que, pour tout $n \geqslant n_0$, $P(n)$ implique $P(n+1)$, alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.*

L'entier n_0 est le **rang initial** de la récurrence.

Remarques :

1) Il est essentiel de **bien rédiger** les récurrences :

– Quand on fait un raisonnement par récurrence on doit le dire au début, et bien expliciter la propriété que l'on veut démontrer.

– Les deux étapes du raisonnement doivent apparaître clairement.

– Pour la deuxième étape on n'écrira **jamais** : « Supposons que la propriété est vraie *pour tout n* ».

– On n'oublie pas de conclure.

– On évite les fautes d'orthographe au mot récurrence.

2) À la deuxième étape, pour démontrer $P(n+1)$, il faut se servir de $P(n)$. Si on réussit à démontrer $P(n+1)$ sans utiliser $P(n)$, c'est qu'il était inutile de faire une récurrence.

3) Le raisonnement par récurrence sert uniquement à démontrer des propriétés qui dépendent d'un *entier*.

Exercice 8 Montrer que : $\forall x \in]-1, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geqslant 1 + nx$ *(inégalité de Bernoulli).*

• Récurrence avec deux prédécesseurs

Parfois il est nécessaire de supposer la propriété vraie aux rangs n et $n-1$ pour pouvoir démontrer qu'elle est vraie au rang $n+1$. Dans ce cas on peut faire une **récurrence avec deux prédécesseurs** (ou **récurrence double**, ou encore **récurrence d'ordre 2**) :

Théorème 4 *Soit $P(n)$ une propriété qui dépend d'un entier naturel n. Si $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(P(n-1)$ et $P(n))$ implique $P(n+1)$, alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

On notera qu'ici on doit commencer par démontrer la propriété aux *deux rangs initiaux* 0 et 1.

L'idée cette fois est que si la propriété est vraie pour $n=0$ et $n=1$, alors par hérédité elle l'est aussi pour $n=2$. Toujours par hérédité, le fait qu'elle soit vraie pour $n=1$ et $n=2$ implique qu'elle est vraie pour $n=3$, et ainsi de suite.

Exercice 9 Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=2$, $u_1=3$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+2}=3u_{n+1}-2u_n$. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=2^n+1$.

• Récurrence forte

Théorème 5 *Soit $P(n)$ une propriété qui dépend d'un entier naturel n. Si $P(0)$ est vraie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\forall\, k \leqslant n, P(k))$ implique $P(n+1)$, alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Ici, pour démontrer la propriété au rang $n+1$, on suppose qu'elle est vraie *à tous les rangs précédents*.

L'idée cette fois est que si la propriété est vraie pour $n=0$, alors par hérédité elle l'est aussi pour $n=1$. Ensuite, le fait qu'elle soit vraie pour $n=0$ et $n=1$ implique qu'elle est vraie pour $n=2$, et ainsi de suite.

Exercice 10 Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=1$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=u_0+u_1+\ldots+u_n$. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

6 Raisonnement par analyse-synthèse

Le raisonnement par **analyse-synthèse** est utilisé pour établir l'existence et l'unicité d'un objet mathématique satisfaisant à des conditions données. Il se fait en deux temps :

– *L'analyse* : on suppose que l'objet existe et on montre qu'il est alors nécessairement égal à un certain objet (on montre ainsi que s'il existe, il est unique).

– *La synthèse* : on vérifie que l'objet que l'on a trouvé dans la partie analyse est bien solution du problème (on établit ainsi l'existence).

Un exemple typique :

Proposition 6 *Toute fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0 se décompose de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.*

Démonstration :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0 et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On veut montrer qu'il existe un unique couple (g,h) de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ telles que $f=g+h$ avec g paire et h impaire. On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse : Supposons que g et h existent. Pour tout $x\in I$, on a donc $\left\{\begin{array}{ll} f(x)=g(x)+h(x) & (1) \\ f(-x)=g(-x)+h(-x)=g(x)-h(x) & (2) \end{array}\right.$.

En additionnant (1) et (2) et en retranchant (2) de (1), on obtient $\left\{\begin{array}{l} g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2} \\ h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2} \end{array}\right.$.

Si g et h existent, elles sont donc nécessairement données par ces formules, et par conséquent elles sont uniques.

Synthèse : Posons, pour tout $x\in I$, $g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$, et vérifions que g et h sont solutions du problème.

On a clairement $f=g+h$, et, pour tout $x\in I$, on a $g(-x)=\frac{f(-x)+f(x)}{2}=g(x)$, donc g est paire, et $h(-x)=\frac{f(-x)-f(x)}{2}=-h(x)$, donc h est impaire. □

Remarque : Par exemple, pour la fonction exponentielle, on obtient $e^x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}+\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$. Les fonctions $x\mapsto\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ et $x\mapsto\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ s'appellent respectivement cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique.

Exercice 11 Déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x+y)=f(x)+f(y).$$