

Fiche d'exercices : Notions de logique

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Écrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :

- | | |
|---------------------------------|-----------------------------|
| 1) f est à valeurs positives. | 3) f est constante. |
| 2) f s'annule. | 4) f n'est pas constante. |

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Quelles propriétés de f les propositions suivantes définissent-elles ?

- | | |
|---|---|
| 1) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$. | 4) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$. |
| 2) $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$. | 5) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$. |
| 3) $\exists T \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)$. | 6) $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(a)$. |

Exercice 3 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifier la réponse.

- | | |
|---|---|
| 1) $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = x$. | 7) $\exists x \in \mathbb{R}, \sin 2x = 2 \sin x$. |
| 2) $\exists x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = x$. | 8) $\exists x \in \mathbb{R}, \cos 2x = 2 \cos x$. |
| 3) $\forall x \in \mathbb{R}_+, x^2 \leq x$. | 9) $\forall n \in \mathbb{N}, (2n)! = 2(n!)$. |
| 4) $\forall x \in [0, 1], x^2 \leq x$. | 10) $\exists n \in \mathbb{N}, (2n)! = 2(n!)$. |
| 5) $\forall x \in \mathbb{R}, \sin 2x = 2 \sin x$. | 11) $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, (m+n)! = m! + n!$. |
| 6) $\forall x \in \mathbb{R}, \cos 2x = 2 \cos x$. | 12) $\exists (m, n) \in \mathbb{N}^2, (m+n)! = m! + n!$. |

Exercice 4 Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $\frac{x}{1+y} = \frac{y}{1+x}$ si et seulement si $x = y$.

Exercice 5 Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\sqrt{x+2} = 2x+1$.

Exercice 6 Montrer que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Exercice 7 Soient a, b, c, d quatre entiers tels que $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$. Montrer que $a = c$ et $b = d$.

Exercice 8 On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de premier terme $u_1 = 1$ et telle que $u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 9 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(2n+1)(7n+1)$ est divisible par 6.

Exercice 10 Calculer la dérivée d'ordre n de la fonction $f : x \mapsto xe^x$.

Exercice 11 Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 4$, on a $2^n \geq n^2$.

Exercice 12 On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = u_1 = 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n+1} - 3^n$.

Exercice 13 Soient B et C deux points distincts du plan et M un point n'appartenant pas à la droite (BC) . Trouver tous les points A tels que :

- 1) M soit le centre de gravité du triangle ABC ,
- 2) M soit le centre du cercle circonscrit au triangle ABC ,
- 3) M soit l'orthocentre du triangle ABC ,
- 4) M soit le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC .

Exercice 14 (*Tescia 2022*) Vous êtes perdu sur une piste dans le désert. Vous arrivez à une bifurcation : de cette bifurcation partent deux pistes, une vers la gauche et une vers la droite. Chacune de ces pistes peut conduire à une oasis ou se perdre dans le désert. À côté de la bifurcation se tiennent trois sphinx. Chaque sphinx vous donne une affirmation :

Sphinx 1 : « Une au moins des deux pistes mène à une oasis. »

Sphinx 2 : « La piste de droite se perd dans le désert. »

Sphinx 3 : « Si la piste de gauche se perd dans le désert alors celle de droite mène à une oasis. »

Déterminer, si possible, vers quoi mènent les deux pistes dans les cas suivants :

- 1) Les trois sphinx disent la vérité.
- 2) Le sphinx 1 ment, chacun des deux autres peut dire la vérité ou non.
- 3) Le sphinx 2 ment, chacun des deux autres peut dire la vérité ou non.
- 4) Le sphinx 3 ment, chacun des deux autres peut dire la vérité ou non.
- 5) Les trois sphinx mentent.
- 6) Seul un des trois sphinx dit la vérité.
- 7) Seul un des trois sphinx ment.