Chapitre 2

CALCUL

I Calcul algébrique

1 Sommes et produits

• Notations

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres réels. Leur somme $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ peut être notée $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$ ou $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant n} a_i$ (on peut utiliser un autre indice que i). De même, leur produit $a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n$ peut être noté $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i$ ou $\displaystyle\prod_{1\leqslant i\leqslant n} a_i$.

Plus généralement, si I est un ensemble fini d'indices et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de réels, la somme et le produit des a_i sont notés respectivement $\displaystyle\sum_{i\in I} a_i$ et $\displaystyle\prod_{i\in I} a_i$.

Remarque : Par convention, une somme vide est égale à 0 (l'élément neutre pour l'addition) et un produit vide est égal à 1 (l'élément neutre pour la multiplication).

Exemples :

– On a $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} \frac{i}{i+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} = \frac{71}{120}$ et $\displaystyle\prod_{i=1}^{5} \frac{i}{i+1} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$.

– Soit I l'ensemble des nombres premiers inférieurs à 10. Alors $\displaystyle\sum_{i\in I} i^2 = 2^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 = 87$.

• Quelques sommes classiques

Proposition 1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:*

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$,

(ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

(iii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Démonstration :

Il y a plusieurs manières de démontrer ces égalités. On peut entre autres raisonner par récurrence. On l'a déjà fait pour la première formule (cf chapitre 1). Faisons-le également pour la deuxième, la troisième étant laissée en exercice.

L'égalité est vraie pour $n = 1$. En effet, $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1$ et $\dfrac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la formule vraie au rang n. On a alors :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$

donc la formule est vraie au rang $n+1$, ce qui achève la récurrence. □

Proposition 2 *(Somme géométrique) Pour tout $q \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & si\ q \neq 1 \\ n+1 & si\ q = 1 \end{cases}.$$

Démonstration :

Si $q = 1$ c'est immédiat. Sinon, on remarque que $(1+q+q^2+\ldots+q^n)(1-q) = 1+q+q^2+\ldots+q^n-(q+q^2+q^3+\ldots+q^{n+1}) = 1-q^{n+1}$ (tous les termes s'éliminent deux à deux sauf le premier et le dernier). On peut aussi raisonner par récurrence. $\square$

Remarque : Pour calculer une somme de la forme $q^p + q^{p+1} + \ldots + q^n$ (avec $q \neq 1$), on met q^p en facteur pour se ramener à la formule précédente :

$$\begin{aligned} q^p + q^{p+1} + \ldots + q^n &= q^p(1+q+\ldots+q^{n-p}) \\ &= q^p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} \\ &= \frac{q^p - q^{n+1}}{1-q}. \end{aligned}$$

Une autre formule à connaître :

Proposition 3 *Soient x et y deux nombres réels et soit n un entier naturel non nul. Alors :*

$$x^n - y^n = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}y^k.$$

Formule que l'on retient plus facilement sous la forme :

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}).$$

Démonstration : Il suffit de développer $(x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1})$. $\square$

Exemples :

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= (x-y)(x+y) \\ x^3 - y^3 &= (x-y)(x^2+xy+y^2) \\ x^4 - y^4 &= (x-y)(x^3+x^2y+xy^2+y^3) \end{aligned}$$

• Linéarité de la somme

Proposition 4 *Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n, \lambda$ des nombres réels. Alors :*

(i) $\displaystyle\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$.

(ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda a_i = \lambda \sum_{i=1}^n a_i$.

Remarque : En général $\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i b_i$ n'est pas égal à $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^n a_i\right) \times \left(\sum_{i=1}^n b_i\right)$.

Exercice 1 Calculer $\displaystyle\sum_{i=0}^n \left(3 \times 2^i - 4 \times 5^i + 2i + 1\right)$.

Exercice 2 Calculer $1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \ldots + 98.99.100$.

• Sommes télescopiques

On sera souvent amené à simplifier une **somme télescopique** :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a_{i+1} - a_i) &= \sum_{i=1}^n a_{i+1} - \sum_{i=1}^n a_i \\ &= a_2 + a_3 + \ldots + a_{n+1} - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \\ &= a_{n+1} - a_1 \text{ (tous les autres termes s'éliminent deux à deux)} \end{aligned}$$

Exercice 3 Calculer $\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$ puis simplifier la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.

• Changement d'indice

On devra parfois effectuer un **changement d'indice** dans une somme. La méthode est la suivante : on pose le changement d'indice, on exprime si nécessaire l'ancien indice en fonction du nouveau, on le remplace dans la somme et *on n'oublie pas de changer les bornes.*

Par exemple, en posant $j = i+1$, la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{i+1}$ peut s'écrire $\displaystyle\sum_{j=2}^{n+1} \frac{j-1}{j}$.

Exercice 4 Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ (pour démarrer on pourra s'inspirer de l'exercice précédent).

• Permutation de signes somme

Proposition 5 *Soit* $(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ *une famille de nombres réels. On a :*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{ij} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

On notera parfois cette double somme $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} a_{ij}$.

Démonstration :

Considérons le tableau suivant :

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{array}$$

On peut calculer la somme S de tous les a_{ij} de deux manières différentes : en calculant d'abord la somme de chaque ligne et en additionnant les résultats obtenus, ou en calculant d'abord la somme de chaque colonne et en additionnant les résultats obtenus.

Pour tout i, la somme des éléments de la i^{e} ligne est $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{ij}$, donc $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{ij}$. Pour tout j, la somme des éléments de la j^{e} colonne est $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$, donc $S = \displaystyle\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$. □

Attention : parfois les bornes de la seconde somme dépendront de l'indice de la première. Considérons par exemple la **somme triangulaire** $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{ij}$.

Quand $i = 1$, j varie de 1 à 1. Quand $i = 2$, j varie de 1 à 2, etc. On additionne ainsi dans cette somme les éléments du triangle suivant ligne par ligne :

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array}$$

Si on somme colonne par colonne, on voit que la somme peut également s'écrire $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_{ij}$.

On peut également noter cette somme $\displaystyle\sum_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} a_{ij}$. On a ainsi

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_{ij}.$$

La méthode la plus simple pour intervertir les sommations est d'écrire l'encadrement $1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n$ de deux manières :

$$1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 \leqslant j \leqslant n \\ j \leqslant i \leqslant n \end{array}\right. .$$

Exercice 5 Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j}$.

2 Factorielle

Définition 1 *Soit n un entier naturel non nul. La* **factorielle de** n, *notée $n!$, est le produit des entiers naturels non nuls inférieurs ou égaux à n :*

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n.$$

On a ainsi $1! = 1$, $2! = 1 \times 2 = 2$, $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$, $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$, $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$, etc.

D'après notre convention sur les produits vides :

$$0! = 1.$$

On sera souvent amené à simplifier des expressions contenant des factorielles. Par exemple :

$$\frac{n!}{n} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n}{n} = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1) = (n-1)!$$

Exercice 6

1) Ecrire de manière plus simple l'expression $2.4.6 \ldots (2n)$ en utilisant des factorielles.

2) De même, simplifier l'écriture de $1.3.5 \ldots (2n+1)$.

3 Coefficients binomiaux

• Définition

Définition 2 *Les* **coefficients binomiaux** *sont les nombres notés* $\binom{n}{p}$ *ou C_n^p définis par*

$$\binom{n}{p} = C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!},$$

où n et p sont deux entiers naturels tels que $p \leqslant n$.

Exemple : $\binom{7}{4} = \dfrac{7!}{4!\,3!} = \dfrac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 1 \times 2 \times 3} = \dfrac{5 \times 6 \times 7}{1 \times 2 \times 3} = 35.$

Remarques :

1) $\binom{n}{p}$ se lit « p parmi n » (on verra plus tard que $\binom{n}{p}$ est le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments).

2) On retiendra en particulier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\binom{n}{0} = 1, \qquad \binom{n}{1} = n, \qquad \binom{n}{n-1} = n, \qquad \binom{n}{n} = 1.$$

3) Si $p < 0$ ou $p > n$, on pose $\binom{n}{p} = 0$.

• Propriétés

Proposition 6 *Soient n et p deux entiers naturels tels que $p \leqslant n$. Alors :*

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Démonstration : $\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{p}$. $\square$

Proposition 7 *(Formule de Pascal) Soient n et p deux entiers naturels tels que $0 < p < n$. Alors :*

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$$

Démonstration :
On a $\binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} = \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} + \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} = \frac{(n-1)!(n-p)}{p!(n-p-1)!(n-p)} + \frac{(n-1)!p}{p(p-1)!(n-p)!} = \frac{(n-1)!(n-p)}{p!(n-p)!} + \frac{(n-1)!p}{p!(n-p)!} = \frac{(n-1)!(n-p)+(n-1)!p}{p!(n-p)!}$
$= \frac{(n-1)!(n-p+p)}{p!(n-p)!} = \frac{(n-1)!n}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}$. $\square$

Cette relation permet de construire le **triangle de Pascal** :

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1
\end{array}$$

où $\dbinom{n}{p}$ est le coefficient placé en ligne $n+1$ et colonne $p+1$.

Chaque coefficient est la somme du coefficient placé au-dessus de lui et de celui placé au-dessus et à gauche.

Remarque : On voit ainsi, par récurrence, que $\dbinom{n}{p}$ est toujours un entier, ce qui n'était pas évident a priori.

4 Formule du binôme de Newton

Proposition 8 *Soient x et y deux nombres réels et soit n un entier naturel. Alors :*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Démonstration :

On raisonne par récurrence sur n.

Pour $n=0$: on a $(x+y)^0 = 1$, et la somme se réduit à un terme : $\binom{0}{0}x^0y^0 = 1$. La formule est donc vraie pour $n=0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la formule vraie au rang n, et montrons-la au rang $n+1$. On a :

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)\times(x+y)^n \\
&= (x+y)\times\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1}
\end{aligned}$$

Dans la deuxième somme, le changement d'indice $j=k+1$ donne $\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}x^{n-j+1}y^j$, qu'on peut écrire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}x^{n+1-k}y^k$ en renommant l'indice k. Ainsi :

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^k + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}x^{n+1-k}y^k \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^k + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}x^{n+1-k}y^k + y^{n+1}
\end{aligned}$$

où on a sorti de la première somme le terme d'indice 0, et de la deuxième le terme d'indice $n+1$. On peut alors regrouper les deux sommes puisqu'elles ont les mêmes bornes :

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^k + \binom{n}{k-1}x^{n+1-k}y^k\right) + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right)x^{n+1-k}y^k + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^k + y^{n+1} \text{ (formule de Pascal)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^k.
\end{aligned}$$

La formule est donc vraie au rang $n+1$.

Par le théorème de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

Remarques :

1) Puisque $x+y = y+x$, on peut échanger les exposants de x et y dans la formule :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}.$$

En pratique on mettra généralement le $n-k$ sur le terme le plus simple et le k sur le plus compliqué.

2) Les coefficients de la somme sont les coefficients binomiaux (d'où leur nom), que l'on peut calculer avec le triangle de Pascal pour les petites valeurs de n. Par exemple :

$$\begin{array}{rcl}(x+y)^2 &=& x^2+2xy+y^2\\(x+y)^3 &=& x^3+3x^2y+3xy^2+y^3\\(x+y)^4 &=& x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4\end{array}$$

3) Pour développer $(x-y)^n$ il suffit de remplacer y par $-y$ dans la formule. Par exemple :

$$\begin{array}{rcl}(x-y)^2 &=& x^2-2xy+y^2\\(x-y)^3 &=& x^3-3x^2y+3xy^2-y^3\\(x-y)^4 &=& x^4-4x^3y+6x^2y^2-4xy^3+y^4\end{array}$$

Exercice 7 Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\ ;\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k\ ;\ \sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}.$$

II Résolution de petits systèmes linéaires

1 Définitions

Définition 3 *Un* **système linéaire de n équations à p inconnues à coefficients réels** *est un système d'équations de la forme :*

$$(\Sigma)\ \left\{\begin{array}{l}a_{11}x_1+\ldots+a_{1p}x_p=b_1\\a_{21}x_1+\ldots+a_{2p}x_p=b_2\\\vdots\\a_{n1}x_1+\ldots+a_{np}x_p=b_n\end{array}\right.$$

où les a_{ij} et les b_i sont des éléments de $\mathbb{R}$ donnés et les x_j sont les inconnues.

Une **solution** *de (Σ) est un p-uplet $(x_1,\ldots,x_p)\in\mathbb{R}^p$ pour lequel toutes les égalités sont vraies. On dit que le système est* **compatible** *s'il a au moins une solution, sinon on dit qu'il est* **incompatible**.

On dit que le système est **homogène** *ou* **sans second membre** *si $b_1=\ldots=b_n=0$.*

Remarque : Un système homogène est toujours compatible puisque $(0,\ldots,0)$ est solution.

2 Opérations élémentaires

Définition 4 *Les* **opérations élémentaires sur les lignes** *d'un système linéaire sont :*

(i) l'échange de deux lignes L_i et L_j (noté $L_i\leftrightarrow L_j$),

(ii) la multiplication d'une ligne L_i par un réel non nul *λ (notée $L_i\leftarrow\lambda L_i$),*

(iii) l'ajout à une ligne L_i du produit d'une autre ligne L_j (avec $j\neq i$) par un réel λ (noté $L_i\leftarrow L_i+\lambda L_j$).

Proposition 9 *Si on applique une de ces opérations à un système, l'ensemble de ses solutions ne change pas.*

Démonstration :

Il suffit de voir que toutes ces opérations sont réversibles : si on a échangé deux lignes d'un système, il suffit de les échanger à nouveau pour revenir au système initial. Si on a multiplié une ligne par $\lambda\neq 0$, il suffit de la multiplier par $1/\lambda$. Si on a ajouté λL_j à la ligne L_i, il suffit de lui retrancher λL_j. $\square$

3 Méthodes pratiques de résolution

On peut résoudre un système linéaire par substitution (on exprime dans une ligne l'une des inconnues en fonction des autres et on la remplace dans les autres lignes) ou en utilisant les opérations élémentaires sur les lignes pour éliminer des inconnues.

1) Considérons par exemple le système de deux équations à deux inconnues suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} x-3y=5 \\ 2x+5y=-1 \end{array}\right. .$$

Résolution par substitution :

$$\left\{\begin{array}{l} x-3y=5 \\ 2x+5y=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3y+5 \\ 2(3y+5)+5y=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3y+5 \\ 11y+10=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3y+5 \\ 11y=-11 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2 \\ y=-1 \end{array}\right. .$$

Le système a donc pour unique solution le couple $(2,-1)$.

Résolution au moyen des opérations élémentaires (méthode du pivot) :

$$\begin{aligned} & \left\{\begin{array}{ll} x-3y=5 & \\ 2x+5y=-1 & L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{l} x-3y=5 \\ \quad 11y=-11 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{l} x=2 \\ y=-1 \end{array}\right. . \end{aligned}$$

On retrouve la solution unique $(2,-1)$.

Noter que les équations $x-3y=5$ et $2x+5y=-1$ définissent deux droites du plan. La solution du système est le couple des coordonnées du point d'intersection de ces deux droites.

2) Considérons maintenant les systèmes suivants :

$$(\Sigma_1)\left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=2 \\ 2x+4y+5z=3 \end{array}\right. , \qquad (\Sigma_2)\left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=2 \\ 3x+4y+5z=3 \end{array}\right. , \qquad (\Sigma_3)\left\{\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ x+2y+3z=3 \\ 3x+4y+5z=7 \end{array}\right. .$$

Résolvons-les par la méthode du pivot. Pour (Σ_1) :

$$\left\{\begin{array}{ll} x+y+z=1 & \\ x+2y+3z=2 & L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ 2x+4y+5z=3 & L_3 \leftarrow L_3-2L_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x+y+z=1 & \\ \quad y+2z=1 & \\ \quad 2y+3z=1 & L_3 \leftarrow L_3-2L_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ \quad y+2z=1 \\ \quad -z=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=-1 \\ z=1 \end{array}\right. .$$

Le système (Σ_1) a donc pour unique solution le triplet $(1,-1,1)$.

Pour (Σ_2) :

$$\left\{\begin{array}{ll} x+y+z=1 & \\ x+2y+3z=2 & L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ 3x+4y+5z=3 & L_3 \leftarrow L_3-3L_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ \quad y+2z=1 \\ \quad y+2z=0 \end{array}\right. .$$

Le système (Σ_2) est incompatible (sinon on aurait $0=1$).

Pour (Σ_3) :

$$\left\{\begin{array}{ll} x+y+z=2 & \\ x+2y+3z=3 & L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ 3x+4y+5z=7 & L_3 \leftarrow L_3-3L_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ \quad y+2z=1 \\ \quad y+2z=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+1-2z+z=1 \\ y=1-2z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1+z \\ y=1-2z \end{array}\right. .$$

Le système (Σ_3) a donc une infinité de solutions : tous les triplets de la forme $(1+z,1-2z,z)$ avec $z \in \mathbb{R}$.

On peut interpréter géométriquement ces résultats. Une équation de la forme $ax+by+cz=d$ (avec a,b,c non tous nuls) définit un plan de l'espace. Les solutions de chacun des systèmes précédents sont les coordonnées des points d'intersection de trois plans :

– Pour le premier système, l'intersection des trois plans est le point de coordonnées $(1,-1,1)$.

– Pour le deuxième, elle est vide.

– Enfin, l'intersection des trois plans définis par (Σ_3) est une droite. En écrivant

$$(1+z,1-2z,z)=(1,1,0)+z(1,-2,1)$$

on voit que cette droite passe par le point de coordonnés $(1,1,0)$ et qu'un de ses vecteurs directeurs a pour coordonnées $(1,-2,1)$.

III Inégalités dans $\mathbb{R}$

1 Opérations et relation d'ordre dans $\mathbb{R}$

L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$. Il est muni d'une addition et d'une multiplication, qui sont associatives et commutatives. L'élément neutre pour $+$ est 0, l'élément neutre pour $\times$ est 1. Tout réel admet un opposé, et tout réel non nul est inversible. La multiplication est intègre et distributive par rapport à l'addition.

Proposition 10 *Pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$:*

(i) $x + y = y + x$ (commutativité de $+$).

(ii) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (associativité de $+$).

(iii) $x + 0 = 0 + x = x$ (0 est élément neutre pour $+$).

(iv) $x \times y = y \times x$ (commutativité de $\times$).

(v) $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$ (associativité de $\times$).

(vi) $x \times 1 = 1 \times x = x$ (1 est élément neutre pour $\times$).

(vii) $\left\{ \begin{array}{l} x \times (y + z) = x \times y + x \times z \\ (y + z) \times x = y \times x + z \times x \end{array} \right.$ *(distributivité de $\times$ par rapport à $+$).*

(viii) $x \times y = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ou } y = 0)$ ($\times$ est intègre).

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre qui est compatible avec l'addition et avec la multiplication par un réel *positif* :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ (x \leqslant y \Rightarrow x + z \leqslant y + z)$$
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall z \in \mathbb{R}_+,\ (x \leqslant y \Rightarrow x \times z \leqslant y \times z)$$

En revanche, si on multiplie les deux membres d'une inégalité par un réel négatif, alors cette inégalité change de sens.

Remarques :

1) Pour étudier le signe d'une expression, il vaut mieux la mettre sous forme de produit ou de quotient (car on peut alors faire un tableau de signes).

2) Pour comparer deux réels a et b on peut étudier le signe de leur différence :

$$a \leqslant b \Leftrightarrow a - b \leqslant 0.$$

3) On ne soustrait pas les inégalités : $2 \leqslant 3$ et $1 \leqslant 4$ mais $2 - 1 > 3 - 4$.

4) Pour établir une inégalité on peut parfois étudier le signe d'une fonction.

Exercice 8 Soient x et y deux réels tels que $1 \leqslant x \leqslant 3$ et $2 \leqslant y \leqslant 4$.

1) Donner un encadrement de $x + y$, de $x - y$, de xy et de $\dfrac{x}{y}$.

2) Même question en supposant cette fois $-4 \leqslant y \leqslant -2$.

Exercice 9 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x - \dfrac{2}{x} \geqslant 1$.

Exercice 10 En étudiant une fonction bien choisie, établir **l'inégalité de Bernoulli** :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > -1,\ (1 + x)^n \geqslant 1 + nx.$$

2 Valeur absolue

Définition 5 *Soit $x \in \mathbb{R}$. La* **valeur absolue de** *x est le réel noté $|x|$ défini par :*

$$|x| = \left\{ \begin{array}{l} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{array} \right. .$$

Par exemple, $|5| = |-5| = 5$.

Proposition 11

(i) Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

(ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $a \in \mathbb{R}_+$:

$$|x| = a \Leftrightarrow (x = a \text{ ou } x = -a).$$

$$|x| \leqslant a \Leftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a.$$

$$|x| \geqslant a \Leftrightarrow (x \geqslant a \text{ ou } x \leqslant -a).$$

(iii) Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|x| = |y| \Leftrightarrow (x = y \text{ ou } x = -y).$$

Démonstration : Distinguer les cas selon les signes de x et y. □

Proposition 12

(i) Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|x \times y| = |x| \times |y|.$$

(ii) Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ avec $y \neq 0$:

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

(iii) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$|x^n| = |x|^n.$$

(iv) (Inégalité triangulaire) Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|x| - |y| \leqslant |x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

(v) Pour tous $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$:

$$|x_1 \times \ldots \times x_n| = |x_1| \times \ldots \times |x_n|,$$

qu'on peut écrire :

$$\left|\prod_{k=1}^{n} x_k\right| = \prod_{k=1}^{n} |x_k|.$$

(vi) Pour tous $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$:

$$|x_1 + \ldots + x_n| \leqslant |x_1| + \ldots + |x_n|.$$

qu'on peut écrire :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k|.$$

Démonstration : Pour (i), (ii) et (iv), distinguer les cas selon les signes de x et y. (iii), (v) et (vi) se démontrent par récurrence. □

Définition 6 *Soient x et y deux réels. La* **distance** *entre x et y est :*

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Remarque : On utilisera souvent cette notion ultérieurement pour définir la limite d'une suite ou d'une fonction. On retiendra en particulier que si a, b et x sont des réels avec b positif, on a :

$$|x - a| \leqslant b \Leftrightarrow -b \leqslant x - a \leqslant b \Leftrightarrow a - b \leqslant x \leqslant a + b.$$

Exercice 11 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

$$|x - 2| = 3 \ ; \ |x - 2| \leqslant 3 \ ; \ |x - 5| = |x + 3| \ ; \ |x - 5| < |x + 3|.$$

3 Minorants, majorants

Définition 7 *Soit A une partie de $\mathbb{R}$.*

On dit que $M \in \mathbb{R}$ est un **majorant de** *A, ou que A est* **majorée** *par M, si M est supérieur ou égal à tous les éléments de A.*

On dit que $m \in \mathbb{R}$ est un **minorant de** *A, ou que A est* **minorée** *par m, si m est inférieur ou égal à tous les éléments de A.*

Exemples :

– Les majorants de l'intervalle $]1, 3]$ sont les réels supérieurs ou égaux à 3, ses minorants sont les réels inférieurs ou égaux à 1.

– Soit A l'ensemble des entiers naturels impairs. Les minorants de A sont les réels inférieurs ou égaux à 1, mais A n'est pas majorée (il n'existe aucun réel qui soit supérieur ou égal à tous les entiers naturels impairs).

Remarque : En général, un majorant ou un minorant n'est pas unique. On ne dira donc pas *le* majorant ou *le* minorant mais *un* majorant ou *un* minorant.

4 Plus petit élément, plus grand élément

Définition 8 *Soit A une partie de $\mathbb{R}$.*

$M \in \mathbb{R}$ est **le plus grand élément de** *A (ou le* **maximum de** *A) si c'est un majorant de A et qu'il appartient à A. On le note alors* $\max A$.

$m \in \mathbb{R}$ est **le plus petit élément de** *A (ou le* **minimum de** *A) si c'est un minorant de A et qu'il appartient à A. On le note alors* $\min A$.

Proposition 13 *S'ils existent, ils sont uniques.*

C'est pourquoi on peut les appeler *le* plus grand ou *le* plus petit élément de A.

Démonstration :

Supposons que M et M' soient tous deux des majorants de A qui appartiennent à A. Alors $M \leqslant M'$, puisque $M \in A$ et que M' est un majorant de A, et $M' \leqslant M$, puisque $M' \in A$ et que M est un majorant de A. On a donc $M = M'$. □

Exemples :

– Soit $A =]1, 3]$. Le plus grand élément de A est 3, mais A n'a pas de plus petit élément.

– Soit A l'ensemble des entiers naturels impairs. Le plus petit élément de A est 1, mais A n'a pas de plus grand élément.

– Soit $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Le plus grand élément de A est 1, mais A n'a pas de plus petit élément.

5 Partie entière

Proposition 14 *Pour tout réel x, il existe un unique entier p tel que $p \leqslant x < p + 1$.*

Démonstration :

Existence : L'ensemble des entiers n tels que $n \leqslant x$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$, donc elle admet un plus grand élément p (admis). On a donc $p \leqslant x$, mais $p + 1 > x$.

Unicité : Soient p et q deux entiers tels que $p \leqslant x < p + 1$ (1) et $q \leqslant x < q + 1$. Alors on a $-q - 1 < -x \leqslant -q$ (2), donc en additionnant membre à membre (1) et (2) on obtient $p - q - 1 < 0 < p - q + 1$. Ainsi on a $-1 < p - q < 1$. Or p et q sont des entiers donc $p - q$ aussi : on a donc forcément $p - q = 0$, d'où $p = q$. □

Cet entier p est appelé **partie entière de** x et est noté $\lfloor x \rfloor$ ou $[x]$ ou encore $E(x)$. On a donc :

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Exemple : La partie entière de $12,4$ est 12 car on a $12 \leqslant 12,4 < 13$. La partie entière de $-12,4$ est -13 (et non -12) car on a $-13 \leqslant -12,4 < -12$.

Remarques :

1) Attention à ne pas intervertir $\leqslant$ et $<$ dans l'encadrement $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.

2) On en déduit un encadrement de la partie entière :

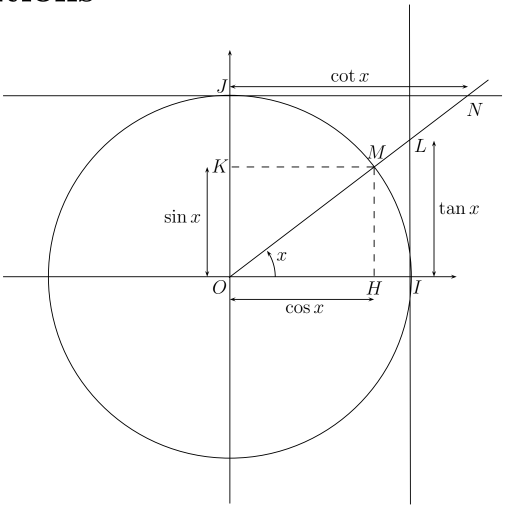
$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x.$$

3) Si $x \in \mathbb{Z}$, alors $\lfloor x \rfloor = x$ puisque $x \leqslant x < x + 1$.

IV Trigonométrie

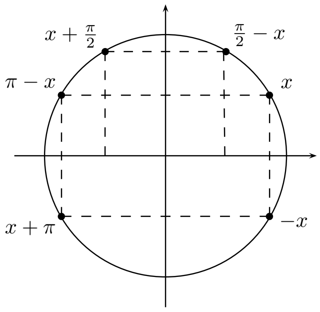
Les formules de ce paragraphe seront utilisées très souvent et dans toutes les matières. **Il faut savoir les retrouver rapidement**, et donc connaître leurs démonstrations.

1 Définitions



$$\begin{aligned}
\cos x &= \overline{OH} \\
\sin x &= \overline{OK} \\
\tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} = \overline{IL} \text{ si } x \not\equiv \frac{\pi}{2} \bmod \pi \\
\cot x &= \frac{\cos x}{\sin x} = \overline{JN} \text{ si } x \not\equiv 0 \bmod \pi
\end{aligned}$$

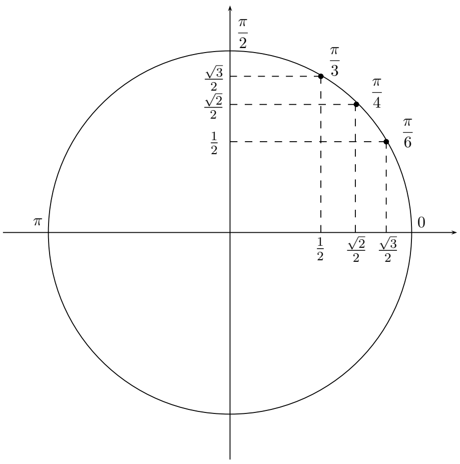
2 Symétries



x	$-x$	$x+\pi$	$\pi - x$	$x + \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} - x$
$\cos x$	$\cos x$	$-\cos x$	$-\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\sin x$	$-\sin x$	$\sin x$	$\cos x$	$\cos x$
$\tan x$	$-\tan x$	$\tan x$	$-\tan x$	$-\cot x$	$\cot x$
$\cot x$	$-\cot x$	$\cot x$	$-\cot x$	$-\tan x$	$\tan x$

Il est inutile d'apprendre par cœur ce tableau : il faut savoir retrouver ces propriétés par lecture sur le cercle trigonométrique.

3 Valeurs remarquables



x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		0
$\cot x$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	

Même remarque : il faut savoir retrouver ces valeurs sur le cercle trigonométrique.

4 Formules usuelles

Proposition 15 *Pour tout réel x :*

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Démonstration : Théorème de Pythagore. □

Proposition 16 *Pour tout réel x non congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π :*

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

Démonstration : $1+\tan^2 x = 1+\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. □

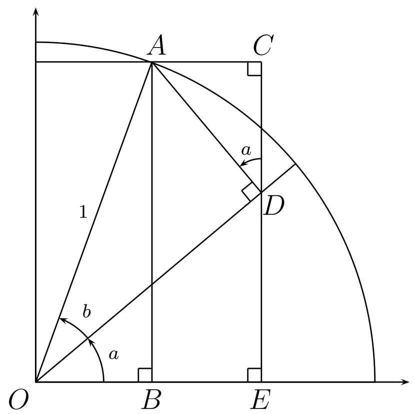
Remarque : On peut retrouver cette formule en dérivant la fonction tangente (cf chapitre 4).

• Formules d'addition

Proposition 17 *Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:*

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

Démonstration : En supposant pour simplifier que les angles a, b et $a+b$ sont aigus, on peut démontrer géométriquement ces formules de la manière suivante :



On a $OA = 1$ donc

$$OD = \cos b \text{ et } AD = \sin b.$$

Ainsi

$$OE = \cos a \cos b \text{ et } DE = \sin a \cos b,$$

et de même

$$CD = \cos a \sin b \text{ et } AC = \sin a \sin b.$$

Par conséquent

$$\cos(a+b) = OB = OE - BE = OE - AC = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

et

$$\sin(a+b) = AB = CE = DE + CD = \sin a \cos b + \sin b \cos a. \ \square$$

Proposition 18 *Lorsque ces expressions sont définies :*

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$
$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

Démonstration : $\tan(a+b) = \dfrac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \dfrac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b - \sin a \sin b} = \dfrac{\frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b}}{\frac{\cos a \cos b - \sin a \sin b}{\cos a \cos b}} = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$. □

• Formules de duplication

Proposition 19 *Pour tout $x \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{aligned}
\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\
&= 2\cos^2 x - 1 \\
&= 1 - 2\sin^2 x \\
\sin 2x &= 2 \sin x \cos x \\
\tan 2x &= \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}
\end{aligned}$$

Démonstration :

Il suffit d'utiliser les formules d'addition en prenant $a = b = x$.

On a d'une part $\cos 2x = \cos(x+x) = \cos x.\cos x - \sin x.\sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$. Pour n'avoir que du cosinus ou que du sinus, on utilise la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$: on obtient $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1-\cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$ ou $\cos^2 x - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$.
D'autre part $\sin 2x = \sin(x+x) = \sin x.\cos x + \sin x.\cos x = 2\sin x \cos x$. □

Proposition 20 *Pour tout $x \in \mathbb{R}$:*

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$
$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

Démonstration :
L'égalité $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ donne $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$, l'égalité $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ donne $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$. □

• Formules de transformation de produit en somme

Proposition 21 *Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{aligned}
\cos a \cos b &= \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)] \\
\sin a \sin b &= \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)] \\
\sin a \cos b &= \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]
\end{aligned}$$

Démonstration :
Il suffit d'additionner ou de soustraire membre à membre les formules d'addition. Par exemple, $\cos(a+b) + \cos(a-b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b + \cos a \cos b + \sin a \sin b = 2\cos a \cos b$ donc $\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$. □

• Formules de transformation de somme en produit

Proposition 22 *Pour tous $p, q \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{aligned}
\cos p + \cos q &= 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \\
\cos p - \cos q &= -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2} \\
\sin p + \sin q &= 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \\
\sin p - \sin q &= 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}
\end{aligned}$$

Démonstration : (voir aussi le paragraphe III.4 du chapitre 3)
On pose $\left\{\begin{array}{l} a = \frac{p+q}{2} \\ b = \frac{p-q}{2} \end{array}\right.$. Alors $\left\{\begin{array}{l} p = a+b \\ q = a-b \end{array}\right.$.

D'après les formules d'addition, $\cos p + \cos q = \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$.
Même méthode pour les autres formules. □