Fiche d'exercices : Calcul

Exercice 1 Soit $n, p \in \mathbb{N}$ avec $n \leqslant p$. Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n} 1 \ ; \ \sum_{k=0}^{n} k \ ; \ \sum_{k=0}^{n} n \ ; \ \sum_{k=n}^{p} 1 \ ; \ \sum_{k=0}^{n} 2^k \ ; \ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \ ; \ \sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k}.$$

Exercice 2 Calculer la somme des n premiers entiers naturels impairs.

Exercice 3 On suppose dans cet exercice les valeurs de $\sum_{k=1}^{n} k$ et $\sum_{k=1}^{n} k^2$ non connues.

1) Calculer $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2 - \sum_{k=1}^{n} k^2$ de deux manières différentes et en déduire $\sum_{k=1}^{n} k$.

2) De même, calculer $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 - \sum_{k=1}^{n} k^3$ et en déduire $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Exercice 4 Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \ ; \ \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} \ ; \ \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k \ ; \ \sum_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n} i \ ; \ \sum_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n} \min(i,j).$$

Exercice 5 Trouver un polynôme P tel que $P(x+1) - P(x) = x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Exercice 6 Calculer $\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} i$ de deux manières différentes et en déduire $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Exercice 7 Donner une expression simple de $\prod_{k=1}^{n} u_k$ dans les cas suivants :

$$u_k = \frac{1}{2} \ ; \ u_k = k \ ; \ u_k = \frac{k}{k+1} \ ; \ u_k = 2^k \ ; \ u_k = \left(1+\frac{1}{k}\right)^k.$$

Exercice 8 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\prod_{k=1}^{n}(4k-2) = \prod_{k=n+1}^{2n} k$.

Exercice 9 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et, pour tout entier $n \geqslant 2$, $u_n = (2n+1)u_{n-1} - n^2 u_{n-2}$. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 10 Déterminer les trois derniers chiffres de l'écriture décimale de $\sum_{n=0}^{2024} n!$.

Exercice 11 Résoudre dans $\mathbb{N}$: $\binom{n}{5} = 17\binom{n}{4}$; $\binom{2n}{1} + \binom{2n}{2} + \binom{2n}{3} = 23n$.

Exercice 12 Soit $m \in \mathbb{N}^*$ fixé. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $a_n = \frac{(mn)!}{(m!)^n n!}$.

1) Montrer que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \binom{mn+m-1}{m-1}$.

2) En déduire que, pour tout n, a_n est un entier.

Exercice 13 Montrer que, pour tout entier naturel n, $(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n$ est un entier.

Exercice 14 Montrer que, si $0 \leqslant p \leqslant n$, alors $\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p}$.

Exercice 15 Calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}$. On pourra développer $(1+1)^{2n}$ et $(1-1)^{2n}$.

Exercice 16 Calculer $\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} \binom{n}{j}\binom{j}{i}$.

Exercice 17 Calculer $1 + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \ldots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n}$.

Exercice 18 Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$. On pourra développer $(1+x)^{2n}$.

Exercice 19 Résoudre les systèmes suivants :

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+5y=3 \\ 4x-3y=1 \end{array}\right. \ ; \ \left\{\begin{array}{l} 2x+y+z=3 \\ x-y-z=1 \\ 3x-y+2z=4 \end{array}\right. \ ; \ \left\{\begin{array}{l} x-4y-z=3 \\ 2x-y-z=1 \\ 3x+2y-z=5 \end{array}\right. \ ; \ \left\{\begin{array}{l} x-4y-z=3 \\ 2x-y-z=1 \\ 3x+2y-z=-1 \end{array}\right.$$

Exercice 20 Résoudre le système $\left\{\begin{array}{l} x+y+mz=m \\ x+my-z=1 \\ x+y-z=1 \end{array}\right.$ (d'inconnues x, y, z).

Exercice 21 Montrer qu'il existe une unique parabole passant par les points de coordonnées respectives $(1,2)$, $(2,-1)$ et $(3,3)$ et en donner une équation.

Exercice 22 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$x^2+3x-5=0 \ ; \ x^3-4x^2+3x+2=0 \ ; \ x^4-8x^2+15=0.$$

Exercice 23 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$x^3 - 4x + \frac{5+3x}{x^2+x-2} > 2 \ ; \ \sqrt{2x+5} > x+1 \ ; \ |x-2| + |x+2| > 5.$$

Exercice 24

1) Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$. Montrer que $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$, puis que $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + yz + zx$.

2) Soient $x, y, z \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $(x+y)^2 \geqslant 4xy$, puis que $(x+y)(y+z)(z+x) \geqslant 8xyz$.

Exercice 25 Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $0 < x < y$. Montrer que :

$$x < \frac{2xy}{x+y} < \sqrt{xy} < \frac{x+y}{2} < y.$$

Exercice 26 Simplifier $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$.

Exercice 27 Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = n$. Montrer que tous les x_i sont égaux à 1.

Exercice 28

1) Montrer que : $\forall\, x \in [0,1]$, $0 \leqslant x(1-x) \leqslant \dfrac{1}{4}$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $x_1, \ldots, x_n \in [0,1]$. Montrer que $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} x_i \leqslant \frac{1}{2^n}$ ou $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(1-x_i) \leqslant \frac{1}{2^n}$.

Exercice 29 Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2} \quad \text{et} \quad \min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}.$$

Exercice 30 Représenter graphiquement les fonctions suivantes :

$$x \mapsto \lfloor x \rfloor \ ; \ x \mapsto x - \lfloor x \rfloor \ ; \ x \mapsto x \lfloor x \rfloor.$$

Exercice 31 Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\lfloor x \rfloor + \lfloor x + 1/2 \rfloor = \lfloor 2x \rfloor$.

Exercice 32 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'equation $\lfloor x \rfloor = \lfloor x^2 \rfloor$.

Exercice 33

1) Démontrer que : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}$.

2) En déduire la valeur de $\left\lfloor 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{10000}} \right\rfloor$.

Exercice 34

1) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n = 1 + \lfloor (2+\sqrt{3})^n \rfloor$.

2) En déduire que l'entier $\lfloor (2+\sqrt{3})^n \rfloor$ est impair.

Exercice 35

1) Calculer $\cos\dfrac{\pi}{12}$, $\sin\dfrac{\pi}{12}$ et $\tan\dfrac{\pi}{12}$ en utilisant le fait que $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$.

2) En déduire sans calculs les cosinus, sinus et tangentes de $\dfrac{5\pi}{12}$, $\dfrac{7\pi}{12}$ et $\dfrac{11\pi}{12}$.

Exercice 36 Calculer $\cos\dfrac{\pi}{8}$ puis $\cos\dfrac{\pi}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 37 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\sin 2x = \tan x \ ; \ \cos 3x - \cos x = \cos 2x - 1$$

$$\cos\left(x + \frac{5\pi}{12}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4} \ ; \ 2\cos^3 x - 3\cos^2 x - 3\cos x + 2 = 0.$$

Exercice 38 Résoudre dans $[0, 2\pi]$ les inéquations suivantes :

$$\cos x \leqslant \frac{1}{2} \ ; \ -\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \sin x < 0 \ ; \ \cos 2x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \ ; \ 2\cos^2 x - 3\cos x - 2 > 0.$$

Exercice 39 Soit $P = \cos\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7}$. Calculer $P\sin\dfrac{\pi}{7}$ et en déduire que $P = -\dfrac{1}{8}$.