Corrigé DM1

Exercice : Mesurage de la raideur d'un ressort

1. On écrit la relation entre F et $\Delta\ell$ sous la forme d'une équation aux dimensions :

$$[F] = [k]\,\mathrm{L} \iff [k] = \frac{[F]}{\mathrm{L}} = \frac{\mathrm{MLT^{-2}}}{\mathrm{L}} \iff \boxed{[k] = \mathrm{MT^{-2}}}$$

2. L'équation est homogène si et seulement si :

$$\mathrm{T} = \mathrm{M}^{\alpha} \times \left(\mathrm{MT^{-2}}\right)^{\beta} \iff \mathrm{T} = \mathrm{M}^{\alpha+\beta}\mathrm{T}^{-2\beta}$$

Les exposants α et β vérifient le système suivant : $\begin{cases} -2\beta = 1 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases}$, dont on montre rapidement qu'il a comme seules solutions $\boxed{\alpha = 1/2}$ et $\boxed{\beta = -1/2}$. La relation s'écrit donc sous la forme :

$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

3. L'incertitude-type $u(T_0)$ est définie comme l'écart-type des valeurs de période mesurées. On utilise le mode statistique de la calculatrice pour l'obtenir : $\boxed{u(T_0) = 0,0073\,\mathrm{s}}$.

Rappel : si votre calculatrice vous propose les valeurs σ_x et s_x vous devez utiliser $\boxed{s_x}$. Si elle vous propose $x\sigma_n$ et $x\sigma_{n-1}$ vous devez choisir $\boxed{x\sigma_{n-1}}$.

4. La calculatrice nous donne également la moyenne : $\boxed{\overline{T_0} = 0,5343\,\mathrm{s}}$. On note $N = 10$ le nombre de répétitions de l'expérience. L'incertitude-type sur cette période moyenne vaut :

$$\boxed{u\left(\overline{T_0}\right) = \frac{u(T_0)}{\sqrt{N}} = 0,0023\,\mathrm{s}}$$

5. On commence par évaluer numériquement l'incertitude-type sur la masse. Connaissant la tolérance $t(m) = 0,1\,\mathrm{g}$ on écrit :

$$u(m) = \frac{t(m)}{\sqrt{3}} = 0,058\,\mathrm{g}$$

On ne peut comparer que des grandeurs qui ont la même dimension, cela n'aurait donc pas de sens de comparer directement $u(m)$ et $u\left(\overline{T_0}\right)$. Pour déterminer la raideur du ressort nous utilisons la relation suivante :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \iff k = \frac{4\pi^2 m}{T_0^2}$$

Les données m et $\overline{T_0}$ permettent de calculer k. On reconnaît une loi de puissance : $k = \mathrm{Cste} \times m^1 \times T_0^{-2}$. L'incertitude-type composée sur k est donnée par :

$$\frac{u(k)}{k} = \sqrt{\left(\frac{u(m)}{m}\right)^2 + \left(2\frac{u\left(\overline{T_0}\right)}{\overline{T_0}}\right)^2}$$

Pour savoir si l'incertitude-type sur m ou celle sur $\overline{T_0}$ est négligeable devant l'autre il faut comparer les deux termes sous la racine. On les évalue numériquement :

$$\begin{cases} \left(\frac{u(m)}{m}\right)^2 = 1,3\cdot10^{-6} \\ \left(2\frac{u\left(\overline{T_0}\right)}{\overline{T_0}}\right)^2 = 7,5\cdot10^{-5} \end{cases} \implies \frac{\left(2\frac{u\left(\overline{T_0}\right)}{\overline{T_0}}\right)^2}{\left(\frac{u(m)}{m}\right)^2} = 58$$

Le terme relatif à la période $\overline{T_0}$ est près de soixante fois plus élevé que celui relatif à la masse. **On peut négliger l'incertitude sur la masse m comparée à celle sur $\overline{T}_0$.**

$$\frac{u(k)}{k} \simeq 2\frac{u\left(\overline{T_0}\right)}{\overline{T_0}}$$

6. La raideur vaut : $k = \frac{4\pi^2 m}{T_0^2} = 6,956\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$. Son incertitude-type vaut :

$$u(k) \simeq \frac{2ku\left(\overline{T_0}\right)}{\overline{T_0}} = 0,060\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$$

On conclut en respectant les règles concernant les chiffres significatifs :

$$\boxed{k = 6,956\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}\ ;\ u(k) = 0,060\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}}$$

7. On calcul l'écart normalisé entre les deux valeurs :

$$\mathrm{EN} = \frac{6,979 - 6,956}{\sqrt{0,011^2 + 0,060^2}} = 0,4$$

L'écart normalisé est inférieur à 2, **les valeurs sont compatibles entre elles** (l'écart peut s'expliquer par la variabilité liée aux processus expérimentaux).

8. On calcule l'incertitude-type $u(m)$ associée à la fabrication des masses : $u(m) = \frac{0.01\times50}{\sqrt{3}} = 0,29\,\mathrm{g}$.

On calcule l'écart-normalisé entre la masse proposée par le fabriquant ($m = 50\,\mathrm{g}$; $u(m) = 0,29\,\mathrm{g}$) et celle affichée par la balance ($m = 50,3\,\mathrm{g}$; $u(m) = 0,058\,\mathrm{g}$) :

$$\mathrm{EN} = \frac{50,3 - 50}{\sqrt{0,29^2 + 0,058^2}} = 1$$

Les valeurs sont compatibles entre elles ; **l'écart entre la masse mesurée sur la balance et celle donnée par le fabriquant peut s'expliquer par la variabilité due au processus de fabrication prévue et renseignée par le fabriquant**.