Correction du DNS 1

EXERCICE 1

1) $\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}} = \dfrac{\frac{6+3+2}{6}}{\frac{15+12+10}{60}} = \dfrac{\frac{11}{6}}{\frac{37}{60}} = \dfrac{11}{6}\dfrac{60}{37} = \dfrac{110}{37}$.

2) $2^{12}9^5 12^{-6} = \dfrac{2^{12}9^5}{12^6} = \dfrac{2^{12}3^{10}}{2^{12}3^6} = 3^4 = 81$.

3) $\dfrac{(4-3\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}{2+\sqrt{5}} = \dfrac{-11+\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} = \dfrac{(-11+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})}{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})} = \dfrac{-27+13\sqrt{5}}{4-5} = 27-13\sqrt{5}$.

4) $\ln 72 + \ln \dfrac{1}{12} - \ln 3 = \ln \dfrac{72}{12\times 3} = \ln \dfrac{72}{36} = \ln 2$.

EXERCICE 2

1) Pour tout x différent de 0, -1, et -2 :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x+2} &\Leftrightarrow \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x+2}\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x+2}\\
&\Leftrightarrow x(x+1) = x+2\\
&\Leftrightarrow x^2+x = x+2\\
&\Leftrightarrow x^2 = 2\\
&\Leftrightarrow x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

2) Pour tout $x \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \sqrt{x+1} = \sqrt{x} + \frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow \sqrt{x+1}^2 = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}\right)^2 \text{ (tout est positif)}\\
&\Leftrightarrow x+1 = x + \sqrt{x} + \frac{1}{4}\\
&\Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{3}{4}\\
&\Leftrightarrow x = \frac{9}{16}.
\end{aligned}$$

3) Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}
\ln(x+1) - \ln x = 1 &\Leftrightarrow \ln \frac{x+1}{x} = 1\\
&\Leftrightarrow \frac{x+1}{x} = e\\
&\Leftrightarrow x+1 = ex\\
&\Leftrightarrow (1-e)x = -1\\
&\Leftrightarrow x = \frac{1}{e-1}.
\end{aligned}$$

EXERCICE 3

1) Montrons par récurrence que $S_n \leqslant 2 - \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

C'est vrai pour $n = 1$ puisque $S_1 = 1$ et que $2 - \dfrac{1}{1} = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $S_n \leqslant 2 - \dfrac{1}{n}$ et montrons que $S_{n+1} \leqslant 2 - \dfrac{1}{n+1}$. On a :

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Comparons cette dernière quantité avec $2-\dfrac{1}{n+1}$:

$$2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}-\left(2-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}=-\frac{1}{n(n+1)^2}\leqslant 0,$$

donc $2-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{(n+1)^2}\leqslant 2-\dfrac{1}{n+1}$ et donc on a bien $S_{n+1}\leqslant 2-\dfrac{1}{n+1}$.

Le théorème de récurrence permet de conclure que $S_n\leqslant 2-\dfrac{1}{n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

2) D'après ce qui précède, on a $S_n\leqslant 2$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, donc la suite (S_n) est majorée.

De plus, $S_{n+1}-S_n=\dfrac{1}{(n+1)^2}\geqslant 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, donc la suite (S_n) est croissante.

On en déduit que la suite (S_n) est convergente (on peut montrer que sa limite est $\dfrac{\pi^2}{6}$ mais c'est une autre histoire).

EXERCICE 4

Soit la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^2$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=2x$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, donc le coefficient directeur de la tangente T à $\mathcal{P}$ au point M est $f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=x_1+x_2$.

Or le coefficient directeur de la droite (M_1M_2) est $\dfrac{y_{M_2}-y_{M_1}}{x_{M_2}-x_{M_1}}=\dfrac{x_2^2-x_1^2}{x_2-x_1}=x_1+x_2$ également.

Les droites (M_1M_2) et T sont donc parallèles.

EXERCICE 5

Étudions les variations de la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^3-3x^2-24x+a$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=3x^2-6x-24=3(x^2-2x-8)$.

Les racines de ce polynôme du second degré sont -2 et 4, donc $f'(x)$ est négatif lorsque $-2\leqslant x\leqslant 4$ et positif ailleurs. On dresse alors le tableau de variations de f, dans lequel on ajoute les valeurs $f(-2)=a+28$ et $f(4)=a-80$ et les limites ($-\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$).

En observant ce tableau de variations, on en déduit que :

- si $a<-28$ alors l'équation $f(x)=0$ a une seule solution réelle,
- si $a=-28$ alors l'équation $f(x)=0$ a deux solutions réelles,
- si $-28<a<80$ alors l'équation $f(x)=0$ a trois solutions réelles,
- si $a=80$ alors l'équation $f(x)=0$ a deux solutions réelles,
- si $a>80$ alors l'équation $f(x)=0$ a une seule solution réelle.