Devoir n°2 (non surveillé)

EXERCICE 1

Montrer qu'il n'existe pas d'entiers a et b tels que $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$.

EXERCICE 2

Montrer que tout entier naturel non nul peut s'écrire comme somme de puissances de 2 deux à deux distinctes (par exemple $57 = 1 + 8 + 16 + 32 = 2^0 + 2^3 + 2^4 + 2^5$). On pourra raisonner par récurrence forte.

EXERCICE 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i^2}{j(j+1)}$.

EXERCICE 4

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k}{n^2}$.

1) On considère les fonctions f, g et h définies sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = x - \sin x, \qquad g(x) = -1 + \frac{x^2}{2} + \cos x \qquad \text{et} \qquad h(x) = -x + \frac{x^3}{6} + \sin x.$$

a) Étudier les variations de f et en déduire qu'elle est à valeurs positives.

b) Étudier les variations de g et en déduire qu'elle est à valeurs positives.

c) Étudier les variations de h et en déduire qu'elle est à valeurs positives.

d) En déduire que, pour tout réel positif x, on a l'encadrement $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x$.

2) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{1}{6n^6}\sum_{k=1}^{n} k^3 \leqslant S_n \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k$.

3) Montrer finalement que la suite de terme général S_n est convergente et déterminer sa limite.