Fiche d'exercices : Nombres complexes

Exercice 1 Écrire sous forme algébrique :

$$(2-5i)^2 \;;\; \frac{1}{3+2i} \;;\; \frac{1+i\sqrt{2}}{\sqrt{2}-i} \;;\; \frac{(3-2i)(4+i)}{2i(1-4i)} \;;\; (2+i)^3 \;;\; 2e^{i\frac{\pi}{6}} \;;\; \left(\frac{1+i}{-1+i}\right)^{2024}.$$

Exercice 2 Écrire sous forme trigonométrique :

$$1+i\sqrt{3} \;;\; \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2} \;;\; \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2(1+i\sqrt{3})} \;;\; -1 \;;\; i \;;\; -2e^{i\frac{\pi}{6}} \;;\; (1+i)^{2024}.$$

Exercice 3 Déterminer les $n \in \mathbb{N}^*$ pour lesquels $(1+i\sqrt{3})^n$ est un réel positif.

Exercice 4 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z - i\overline{z} = 6-6i$.

Exercice 5 Soient $a, b \in \mathbb{U}$ tels que $ab \neq -1$. Montrer que $\dfrac{a+b}{1+ab} \in \mathbb{R}$.

Exercice 6 Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Montrer que : $z + \dfrac{1}{z} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (z \in \mathbb{R}$ ou $|z| = 1)$.

Exercice 7 Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $|z| = \dfrac{1}{|z|} = |z-1|$.

Exercice 8 Soit $z = x+iy$ un complexe (avec x, y réels). Soit $Z = \dfrac{z-2+i}{iz+1}$.
1) Exprimer les parties réelle et imaginaire de Z en fonction de x et y.
2) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que Z est un imaginaire pur.
3) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que Z est un nombre réel.

Exercice 9 Soit θ un réel. Exprimer $\cos 5\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et en déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{10}$ et $\sin\dfrac{\pi}{10}$.

Exercice 10 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1$.

Exercice 11 Calculer $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{8}} \sin x \sin 2x \sin 3x \, dx$.

Exercice 12 Soient θ un réel et n un entier naturel. Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta) \;;\; \sum_{k=0}^{n} \cos^2(k\theta) \;;\; \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(k\theta)}{\cos^k\theta} \;;\; \sum_{k=0}^{n} 3^k \sin^3\frac{\theta}{3^{k+1}}.$$

Exercice 13 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$z^3 = 1-i \;;\; z^3 = \overline{z} \;;\; z^2+3z+5=0 \;;\; z^3-z-6=0 \;;\; z^4+2z^2-4=0.$$

Exercice 14 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 + (2i-11)z^2 + (25-19i)z - 8(1-3i) = 0$, sachant qu'elle admet une solution réelle.

Exercice 15 Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ le système $\begin{cases} z_1 + z_2 = 5 \\ z_1 z_2 = 7+i \end{cases}$.

Exercice 16 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\dfrac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$.

Exercice 17 Calculer la somme et le produit des racines n^e de l'unité.

Exercice 18 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z+1)^n - (z-1)^n = 0$.

Exercice 19 Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{3k}$. On pourra développer $(1+1)^{3n}$, $(1+j)^{3n}$ et $(1+j^2)^{3n}$.

Exercice 20 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$ puis $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (1+\omega^k)^n$.

Exercice 21 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{z \in \mathbb{U}_n} |1+z|$.

Exercice 22 Soit $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$. Montrer que $\alpha = \omega + \omega^4$ et $\beta = \omega^2 + \omega^3$ sont les solutions de l'équation $z^2 + z - 1 = 0$. En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ et $\sin\dfrac{2\pi}{5}$.

Exercice 23 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^{2n} - 2z^n \cos n\theta + 1 = 0$, où θ est un réel et n un entier naturel non nul.

Exercice 24 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $e^z = 2$ et représenter les solutions dans le plan complexe. Même question avec l'équation $e^z = 1+i$.

Exercice 25 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $e^{2z} - 6e^z + 12 = 0$.

Dans les exercices suivants, le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Exercice 26 On considère les points A, B et C d'affixes respectives 1, i et $1-i\sqrt{2}$. Calculer les longueurs AB, AC et BC et déterminer une mesure des angles $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

Exercice 27 On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = i$, $b = 2-i$ et $c = 1+\sqrt{3}+i\sqrt{3}$. Calculer $\dfrac{c-a}{b-a}$ et en déduire la nature du triangle ABC.

Exercice 28 On considère les points A et B d'affixes respectives 1 et i. Déterminer les affixes des points C tels que le triangle ABC soit équilatéral.

Exercice 29

1) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-3+2i|=2$.
2) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-2-i|=|z+1+3i|$.
3) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|(1+i)z-2i|=2$.

Exercice 30 Déterminer l'ensemble des points d'affixe z tels que :

1) les points d'affixes respectives z, z^2 et z^4 sont alignés.
2) les points d'affixes respectives i, z et iz sont alignés.
3) les points d'affixes respectives 1, z et z^2 forment un triangle rectangle.

Exercice 31 Pour tout $z \in \mathbb{C}$ distinct de $-2-i$, on pose $Z = \dfrac{z-4-2i}{z+2+i}$.

1) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|Z|=1$.
2) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que Z est un réel positif.
3) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que Z est un imaginaire pur.

Exercice 32 Soient A, B et C trois points d'affixes respectives a, b et c.

1) Montrer que le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si $a+jb+j^2c=0$.
2) Montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$.

Exercice 33 Soit ABC un triangle quelconque. Extérieurement au triangle ABC on construit les triangles ABB' et ACC', tous deux rectangles et isocèles en A. Soit M le milieu du segment $[BC]$. Montrer que les droites (AM) et $(B'C')$ sont perpendiculaires et que $B'C'=2AM$.

Exercice 34 Soient z_1, $z_2 \in \mathbb{C}^*$. Montrer que $\dfrac{z_1}{z_2}$ est un imaginaire pur si et seulement si $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$. Interpréter ce résultat dans le plan complexe.

Exercice 35 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier la réponse.

1) $\forall z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(iz) = -\mathrm{Im}(z)$.
2) $\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2$, $\overline{a+ib} = a-ib$.
3) $\forall z \in \mathbb{C}$, $\overline{e^{iz}} = e^{-iz}$.
4) $\forall (z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2$, $|z_1-z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|$.
6) j est une racine 9^{e} de l'unité.
7) Si n divise p, alors $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}_p$.
8) Si $|z|=5$ et que $|z-1|=|z-2|$ alors $|z-3|=5$.