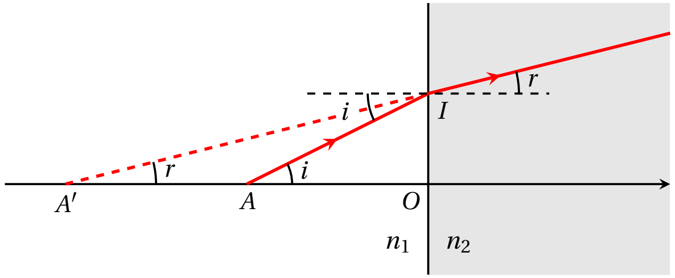
TD2 : Formation des images - corrigé

Application 1

Dans le cas $n_2 > n_1$ les rayons s'approchent de la normale en se réfractant. L'image se forme alors **en amont de l'objet** (dans le sens de l'axe optique), comme on le voit sur la figure ci-dessous.



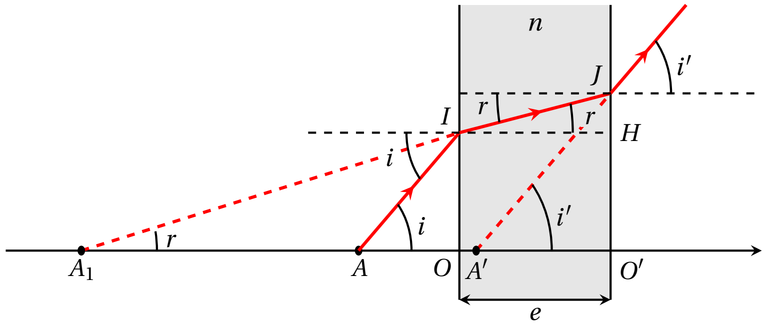
D'après la relation de conjugaison du dioptre plan et puisque $n_2 > n_1$:

$$\overline{OA'} = \frac{n_2}{n_1}\overline{OA} \implies \overline{OA'} < \overline{OA} < 0$$

La figure est bien cohérente avec la relation de conjugaison.

Application 2

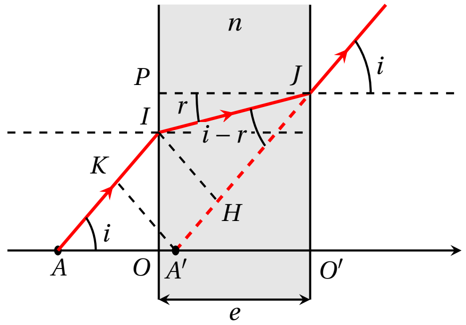
Les deux dioptres sont plans et parallèles donc l'axe orthogonal passant par A fait figure d'axe optique. On trace la marche d'un rayon lumineux issu de A et traversant la vitre en arrivant sous une incidence i. On note respectivement A_1 et A' l'image intermédiaire par le premier dioptre et l'image par la vitre, dans les conditions de Gauss.



On applique les lois de la réfraction en I et J :

$$\sin i = n \sin r = \sin i' \iff i = i'$$

Le rayon incident et le rayon émergent sont parallèles (voir exercice 7 du chapitre 1).



Dans le triangle IJP rectangle en P on peut écrire $IJ = \dfrac{e}{\cos r}$.

Dans le triangle IJH rectangle en H on peut écrire $IH = IJ\sin(i-r)$.

Dans le triangle $AA'K$ rectangle en K on peut écrire $\overline{AA'} = \dfrac{A'K}{\sin i} = \dfrac{IH}{\sin i}$.

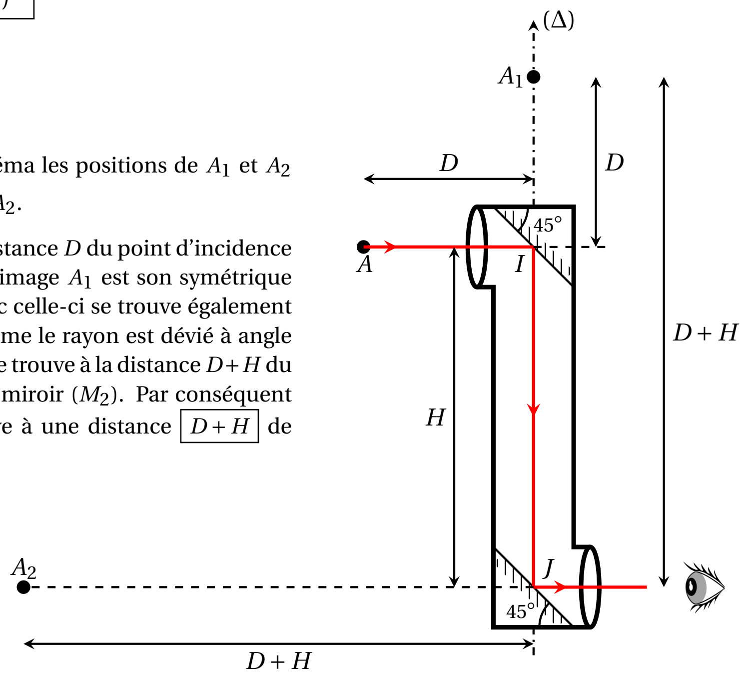
À partir des relations précédentes on obtient que $\overline{AA'} = \dfrac{\sin(i-r)}{\sin i \cos r}e$. On simplifie dans les conditions de Gauss : $\overline{AA'} = \left(1-\dfrac{r}{i}\right)e$. La loi de la réfraction dans les conditions de Gauss s'écrit $i = nr \iff \dfrac{r}{i} = \dfrac{1}{n}$.

On conclut : $\boxed{\overline{AA'} = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)e}$.

Application 3

On représente sur un schéma les positions de A_1 et A_2 définis par $A \overset{(M_1)}{\longleftrightarrow} A_1 \overset{(M_2)}{\longleftrightarrow} A_2$.

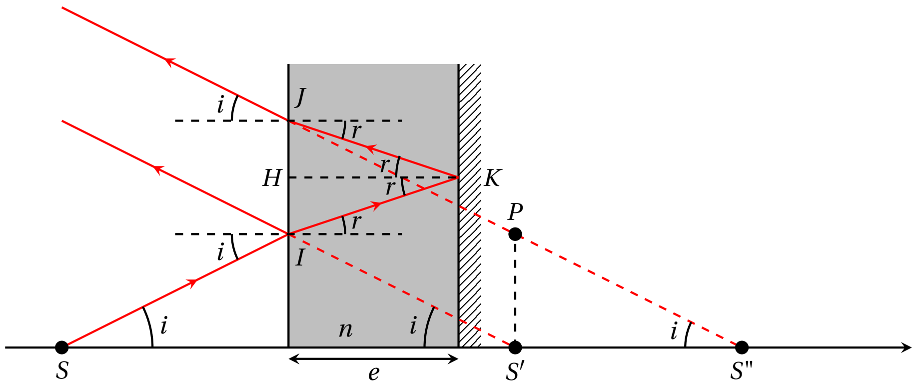
L'objet A est situé à une distance D du point d'incidence I sur le miroir (M_1). Son image A_1 est son symétrique par rapport au miroir donc celle-ci se trouve également à la distance D de I. Comme le rayon est dévié à angle droit on peut dire que A_1 se trouve à la distance $D+H$ du point d'incidence J sur le miroir (M_2). Par conséquent l'image finale A_2 se trouve à une distance $\boxed{D+H}$ de l'axe (Δ).



TD2 : Formation des images - corrigé

⋆⋆ Exercice 1 : Réflexion sur une lame de verre

1. et 2.



3. Pour déterminer la distance $\overline{S'S"}$, commençons par remarquer que $S'P = IJ$ et que $\tan i = \frac{S'P}{\overline{S'S"}}$ (triangle $S'S"P$).
Dans les conditions de Gauss, on peut donc utiliser l'approximation suivante : $\overline{S'S"} = \frac{IJ}{i}$.
L'étape suivante consiste à déterminer l'expression de IJ. On remarque que $IJ = 2IH$, avec $\tan r \simeq r = \frac{IH}{e} \iff IJ = 2er$.
La loi de la réfraction en I s'écrit $\sin i = n \sin r$, ou encore dans les conditions de Gauss, $i = nr$.
Des résultats précédents, on déduit que : $\boxed{\overline{S'S"} = \frac{2er}{i} = \frac{2e}{n}}$.

⋆⋆ Exercice 2 : Dioptre sphérique

1. Dans les triangles AHI et CHI, on peut écrire :

$$\tan\alpha \simeq \alpha = -\frac{\overline{HI}}{\overline{HA}} \simeq -\frac{\overline{HI}}{\overline{OA}} \quad \text{et} \quad \tan\gamma \simeq \gamma = \frac{\overline{HI}}{\overline{HC}} \simeq \frac{\overline{HI}}{R}$$

ce qui revient à dire que : $\overline{HI} = -\alpha\overline{OA} = \gamma R \iff \boxed{\gamma = -\frac{\overline{OA}}{R}\alpha}$.

2. Dans le triangle AIC, $\widehat{AIC} = \pi - i$. En sommant les angles de ce triangle, on montre que :

$$\alpha + \pi - i + \gamma = \pi \iff \boxed{i = \alpha + \gamma}$$

3. Dans le triangle ICA', $\widehat{ICA'} = \pi - \gamma$. En sommant les angles de ce triangle, on montre que :

$$r + \pi - \gamma + \beta = \pi \iff \boxed{\gamma = r + \beta}$$

On en déduit que $\beta = \gamma - r = -\frac{\overline{OA}}{R}\alpha - r$. D'après la loi de la réfraction en I : $i = nr$ (dans les CG), ce qui amène à :

$$\beta = -\frac{\overline{OA}}{R}\alpha - \frac{i}{n} = -\frac{\overline{OA}}{R}\alpha - \frac{1}{n}(\alpha+\gamma) = -\frac{\overline{OA}}{R}\alpha - \frac{1}{n}\left(\alpha - \frac{\overline{OA}}{R}\alpha\right)$$

Après simplifications, on obtient la relation suivante : $\boxed{\beta = -\frac{\alpha}{n}\left[\frac{(n-1)\overline{OA}}{R} + 1\right]}$.

4. Dans le triangle $A'HI$, on peut écrire : $\tan\beta \simeq \beta = -\frac{\overline{HI}}{\overline{HA'}} \simeq \frac{\overline{HI}}{\overline{OA'}}$. En utilisant le résultat de la question 1, on montre que : $-\alpha\overline{OA} = \beta\overline{OA'}$. En utilisant l'expression de β obtenue à la question précédente, il vient que :

$$-\alpha\overline{OA} = -\frac{\alpha}{n}\left[\frac{(n-1)\overline{OA}}{R} + 1\right]\overline{OA'} \iff n\overline{OA} = \frac{n-1}{R}\overline{OA}\cdot\overline{OA'} + \overline{OA'}$$

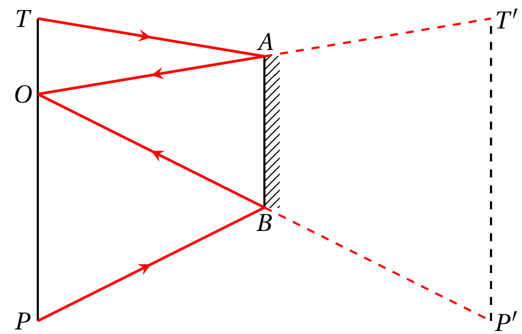
En divisant cette équation par $\overline{OA}\cdot\overline{OA'}$, on arrive au résultat attendu.

5. Pour que l'image d'un objet à l'infini sur l'axe optique se forme au point B, il faut que $\overline{OA'} = 2R$. D'après la relation de conjugaison établie à la question précédente, cela revient à dire que n vérifie :

$$\frac{n}{2R} = \frac{n-1}{R} \iff \boxed{n = 2}$$

⋆⋆ Exercice 3 : Taille d'un miroir plan

Une personne se tenant devant le miroir est modélisée par un segment allant des pieds P à la tête T. L'œil est placé en O. On représente graphiquement la situation limite, dans laquelle le miroir est juste assez grand pour que l'observateur arrive à voir l'image de ses pieds P' et de sa tête T'.



L'image $P'T'$ est le symétrique de PT par rapport au miroir, ce qui signifie que $OA = \frac{1}{2}OT'$. Comme les triangles OAB et $OP'T'$ sont isométriques, on peut appliquer le théorème de Thalès : $\frac{AB}{P'T'} = \frac{OA}{OT'} = \frac{1}{2}$.
La taille du miroir est la moitié de celle de l'image, donc la moitié de celle de l'observateur.
En conclusion, une personne de taille h peut se voir entièrement dans un miroir plan à condition que celui-ci ait une taille **au moins égale à $h/2$**.

⋆⋆ Exercice 4 : Association de deux miroirs quasi-orthogonaux

1. L'image A'_1 est le symétrique de A par rapport au miroir (M_1). On représente sa position sur la figure en page suivante. Puisque O appartient au miroir (M_1) alors les droites (OA) et (OA_1) sont elles-mêmes symétriques par rapport à (M_1). Sachant que (OA) fait un angle $\alpha/2$ avec (M_1) on en déduit que A_1 s'obtient à partir de A par une rotation de centre O et d'angle $\boxed{\beta_1 = 2\times\alpha/2 = \alpha}$.

2. Par un raisonnement analogue on détermine la position de A''_{12} par rapport à A'_1. La droite (OA'_1) fait un angle $3\alpha/2$ avec le miroir (M_2) donc $\widehat{A'_1OA''_{12}} = 3\alpha$. On détermine alors β_{12} :

$$\widehat{A'_1OA''_{12}} = \beta_1 + \beta_{12} \iff \boxed{\beta_{12} = \widehat{A'_1OA''_{12}} - \beta_1 = 2\alpha}$$

Par symétrie les déviations qui permettent de trouver A'_2 et A''_{21} sont identiques : $\beta_2 = \alpha$ et $\beta_{21} = 2\alpha$, mais avec une rotation dans le sens inverse. On conclut :

$$\widehat{A''_{12}OA''_{21}} = 2\pi - \beta_{12} - \beta_{21} = 2\pi - 4\alpha \iff \boxed{\widehat{A''_{12}OA''_{21}} = 4\varepsilon}$$