Devoir n°4 (non surveillé)

EXERCICE 1

Soient $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et $Z = \dfrac{z_1^2}{z_2}$.

1) Écrire Z sous forme algébrique.

2) Écrire z_1, z_2 et Z sous forme exponentielle.

3) En déduire les valeurs exactes de $\cos \dfrac{5\pi}{12}$ et de $\sin \dfrac{5\pi}{12}$.

EXERCICE 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x + \cos 3x = \cos 2x$.

EXERCICE 3 - Autour de la somme harmonique

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1) Écrire un programme en Python qui affiche une valeur approchée de $H_{1000000}$.

2) a) Montrer que la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

b) Montrer que la suite de terme général $H_{2n} - H_n$ est strictement croissante.

c) En déduire que la suite (H_n) ne peut pas être convergente. On admettra que si (H_n) converge vers un réel ℓ, alors la suite (H_{2n}) converge aussi vers ℓ.

3) a) Étudier sur $]1, +\infty[$ les fonctions $f : x \mapsto \ln(x+1) - \ln x - \dfrac{1}{x}$ et $g : x \mapsto \ln x - \ln(x-1) - \dfrac{1}{x}$ et dresser leurs tableaux de variation en précisant leurs limites en 1 et en $+\infty$.

b) En déduire que, pour tout $x > 1$, on a $\ln(x+1) - \ln x \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \ln x - \ln(x-1)$.

c) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, on a l'encadrement $\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln n$ et retrouver le résultat de la question 2)c).

4) Soient n et p deux entiers naturels non nuls. On pose $S_p = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k(k+n)}$.

a) Trouver deux réels a et b indépendants de k tels que $\dfrac{1}{k(k+n)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+n}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

b) En déduire que $S_p = \dfrac{H_n + H_p - H_{n+p}}{n}$.

c) En utilisant l'encadrement obtenu à la question 3)b), montrer que $H_{n+p} - H_p$ tend vers 0 lorsque p tend vers $+\infty$ et en déduire la limite de S_p lorsque p tend vers $+\infty$.