Correction du DNS 2

EXERCICE 1

On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe deux entiers a et b tels que $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$. En mettant au carré on a alors $3 = a^2 + 2ab\sqrt{2} + 2b^2$.

Si a et b sont non nuls on en déduit que $\sqrt{2} = \dfrac{3 - a^2 - 2b^2}{2ab}$ et donc que $\sqrt{2}$ est rationnel : impossible.

Si b est nul alors $\sqrt{3} = a$ est un entier : impossible.

Enfin si a est nul alors $3 = 2b^2$ est pair : impossible.

Dans tous les cas on aboutit à une contradiction. Par conséquent on ne peut pas écrire $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$ avec a et b entiers.

EXERCICE 2

Montrons par récurrence forte que tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ peut s'écrire comme somme de puissances de 2.

La propriété à démontrer est vraie pour $n = 1$ puisque $1 = 2^0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que la propriété est vraie pour tous les entiers compris entre 1 et n et démontrons-la au rang $n+1$. Si $n+1$ est une puissance de 2 c'est fini. Sinon, soit $p \in \mathbb{N}$ tel que 2^p soit la plus grande puissance de 2 inférieure ou égale à $n+1$ (par exemple si $n+1 = 57$ la plus grande puissance de 2 inférieure à 57 est $32 = 2^5$ donc dans ce cas $p = 5$). Alors l'entier $n + 1 - 2^p$ est compris entre 1 et n donc, par hypothèse de récurrence, il peut s'écrire sous la forme $2^{a_1} + \ldots + 2^{a_n}$ avec $a_1 < \ldots < a_n$ des entiers naturels. On a ainsi $n + 1 = 2^{a_1} + \ldots + 2^{a_n} + 2^p$ et les a_i sont strictement inférieurs à p sinon $n+1$ serait plus grand que $2^p + 2^p = 2^{p+1}$ ce qui est impossible par définition de p.

Le théorème de récurrence forte permet de conclure que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

EXERCICE 3

C'est une somme triangulaire, il vaut mieux sommer d'abord sur i puis sur j :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i^2}{j(j+1)} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} \frac{i^2}{j(j+1)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} \sum_{i=1}^{j} i^2 \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} \frac{j(j+1)(2j+1)}{6} \\
&= \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{n}(2j+1) \\
&= \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{n} j + \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{n} 1 \\
&= \frac{1}{3}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n}{6} \\
&= \frac{n(n+2)}{6}.
\end{aligned}$$

EXERCICE 4

1) a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f'(x) = 1 - \cos x$. Ainsi f' est positive et ne s'annule qu'en $2k\pi$ (avec $k \in \mathbb{N}$), donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Or $f(0) = 0$, donc f est à valeurs positives (et ne s'annule qu'en 0).

b) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $g'(x) = x - \sin x = f(x)$. Or f est positive et ne s'annule qu'en 0, donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. De plus $g(0) = 0$, donc g est à valeurs positives (et ne s'annule qu'en 0).

c) La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $h'(x) = -1 + x^2/2 + \cos x = g(x)$. Or g est positive et ne s'annule qu'en 0, donc h est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. De plus $h(0) = 0$, donc h est à valeurs positives (et ne s'annule qu'en 0).

d) Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ on a, d'après ce qui précède, $x - \sin x \geqslant 0$ et $-x + x^3/6 + \sin x \geqslant 0$, d'où $x \geqslant \sin x$ et $\sin x \geqslant x - x^3/6$, ce qui fournit l'encadrement demandé.

2) Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$ on a, d'après la question précédente (en remplaçant x par $\frac{k}{n^2}$) :

$$\frac{k}{n^2} - \frac{k^3}{6n^6} \leqslant \sin \frac{k}{n^2} \leqslant \frac{k}{n^2}$$

donc en sommant on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n^2} - \frac{k^3}{6n^6} \right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k}{n^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$$

soit

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k - \frac{1}{6n^6} \sum_{k=1}^{n} k^3 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k.$$

3) On a

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1+1/n}{2} \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

et

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k - \frac{1}{6n^6} \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{n^2(n+1)^2}{24n^6} = \frac{1+1/n}{2} - \frac{1+2/n+1/n^2}{24n^2} \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

donc, d'après le théorème des gendarmes, la suite (S_n) converge vers $\frac{1}{2}$ également.