Corrigé DS1

Exercice 1 : Autour des systèmes d'unités

1. Voir cours.

2. Pression : **pascal** (Pa) ; énergie : **joule** (J) ; puissance : **watt** (W) ; force : **newton** (N) ; résistance électrique : **ohm** (Ω), charge électrique : **coulomb** (C) ; angle plan : **radian** (rad).

3. La dimension d'une force est : $[F] = \mathrm{MLT^{-2}}$ donc on peut écrire : $\boxed{1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-2}}}$.

4. D'après le résultat de la question précédente on peut écrire dans le système CGS : $1\,\mathrm{dyn} = 1\,\mathrm{g\cdot cm\cdot s^{-2}}$. Puisque $1\,\mathrm{g} = 10^{-3}\,\mathrm{kg}$ et $1\,\mathrm{cm} = 10^{-2}\,\mathrm{m}$ on conclut que :

$$1\,\mathrm{dyn} = \left(10^{-3}\,\mathrm{kg}\right)\cdot\left(10^{-2}\,\mathrm{m}\right)\cdot\mathrm{s^{-2}} \iff \boxed{1\,\mathrm{dyn} = 10^{-5}\,\mathrm{N}}$$

5. On écrit la loi de Planck-Einstein sous la forme d'une équation aux dimensions :

$$[E] = [\nu]\,[h] \iff [\hbar] = [h] = \frac{[E]}{[\nu]} = \frac{\mathrm{ML^2T^{-2}}}{\mathrm{T^{-1}}} \iff \boxed{[\hbar] = \mathrm{ML^2T^{-1}}}$$

On rappelle l'expression de la force gravitationnelle (en norme) entre deux masses m et m' distantes de d : $F = G\frac{mm'}{d^2}$. Sous forme dimensionnelle :

$$[G] = \frac{[F]\,\mathrm{L^2}}{\mathrm{M^2}} = \frac{\mathrm{MLT^{-2}\times L^2}}{\mathrm{M^2}} \iff \boxed{[G] = \mathrm{M^{-1}L^3T^{-2}}}$$

6. On cherche l'expression du temps de Planck : $T_P = \hbar^\alpha c^\beta G^\gamma$. L'équation aux dimensions donne :

$$\mathrm{T} = \left(\mathrm{ML^2T^{-1}}\right)^\alpha \times \left(\mathrm{LT^{-1}}\right)^\beta \times \left(\mathrm{M^{-1}L^3T^{-2}}\right)^\gamma = \mathrm{M}^{\alpha-\gamma}\mathrm{L}^{2\alpha+\beta+3\gamma}\mathrm{T}^{-\alpha-\beta-2\gamma}$$

Les contraintes sur les exposants dimensionnels correspondent au système suivant :

$$\begin{cases} \alpha-\gamma = 0 \\ 2\alpha+\beta+3\gamma = 0 \\ -\alpha-\beta-2\gamma = 1 \end{cases} \implies \alpha = \gamma = \frac{1}{2} \text{ et } \beta = -\frac{5}{2} \text{ d'où } \boxed{T_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}}}$$

7. Une vitesse est homogène à une distance divisée par un temps donc on peut écrire l'équation homogène suivante :

$$c = \frac{L_P}{T_P} \iff \boxed{L_P = cT_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}}$$

8. On peut raisonner comme à la question 6, ou bien faire preuve d'astuce et dire que $[\hbar] = \mathrm{ML^2T^{-1}}$ donc la relation suivante est homogène :

$$\hbar = \frac{M_P L_P^2}{T_P} \iff \boxed{M_P = \frac{T_P\hbar}{L_P^2} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}}$$

9. $\boxed{T_P = 5{,}37\cdot10^{-44}\,\mathrm{s}}$, $\boxed{M_P = 2{,}17\cdot10^{-8}\,\mathrm{kg}}$, $\boxed{L_P = 1{,}61\cdot10^{-35}\,\mathrm{m}}$.

Ces unités ne sont pas utilisées car elles ne sont pas **pratiques** (ordres de grandeur très éloignés des valeurs mesurées dans les expériences de la vie courante).

Exercice 2 : Appareil photographique d'un smartphone

1. Voir cours.

2. $\boxed{n\sin i = \sin r}$.

3. Le rayon n'est pas dévié par le dioptre plan car il arrive sous incidence normale. Le rayon qui émerge de la lentille entre dans un milieu (l'air) moins réfrigent que le verre, c'est pourquoi le rayon s'éloigne de la normale en se réfractant ($t > i$).

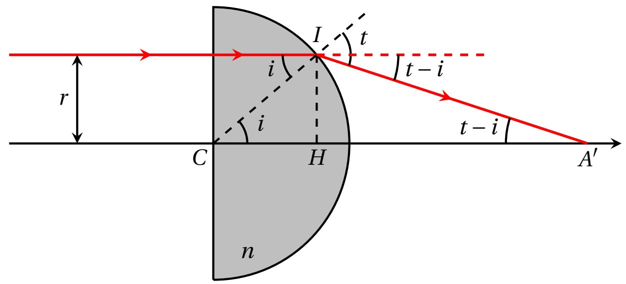
4. Plus r augmente et plus i augmente. Si i devient supérieur à l'angle de réflexion totale $I_{\text{tot}} = \arcsin(1/n)$, le rayon se réfléchit totalement en I et n'émerge pas de la lentille. Ici : $\sin i = \frac{r}{R}$ (triangle CIH). La condition de réflexion totale s'écrit :

$$i > I_{\text{tot}} \iff \sin i > \frac{1}{n} \iff \boxed{r > r_0 = \frac{R}{n} = 2{,}6\,\mathrm{mm}}$$

En choisissant un diamètre $\Phi = 5{,}0\,\mathrm{mm}$ les rayons passant par les bords de la lentille sont à une distance $\Phi/2 = 2{,}5\,\mathrm{mm}$ de l'axe optique. Le constructeur a choisi cette valeur légèrement inférieure à r_0 pour **éviter la réflexion totale tout en faisant en sorte qu'un maximum de lumière traverse la lentille**.

5. On écrit simplement dans le triangle CIH : $\boxed{CH = R\cos i}$.

6.



On reconnaît sur le schéma que $\widehat{ICH} = i$ et $\widehat{IA'H} = t - i$. Par conséquent : $\tan(t-i) = \frac{r}{HA'}$ et $\sin i = \frac{r}{R}$ ce qui implique que $r = \tan(t-i)HA' = R\sin i$. On conclut :

$$HA' = \frac{R\sin i}{\tan(t-i)} = R\cos i\,\frac{\tan i}{\tan(t-i)} \iff \boxed{\overline{CA'} = CH + HA' = R\cos i\left(1 + \frac{\tan i}{\tan(t-i)}\right)}$$

L'image d'un point objet à l'infini sur l'axe optique est elle-même nécessairement sur l'axe optique. Or, le résultat ci-dessus montre que la position de A' dépend de i donc du rayon lumineux incident. Les rayons émergeant de la lentille ne se croisent pas en un même point de l'axe optique donc **il n'y a pas stigmatisme rigoureux de la lentille**.

7. Voir cours.

8. On reprend le calcul précédent en simplifiant l'expression dans l'approximation des petits angles :

$$\overline{CF'} = R\left(1 + \frac{i}{t-i}\right) = R\frac{t}{t-i}$$

On écrit également la loi de la réfraction dans l'approximation des petits angles : $t = ni$, d'où :

$$\overline{CF'} = R\frac{ni}{ni-i} \iff \boxed{\overline{CF'} = \frac{nR}{n-1} = 11{,}7\,\mathrm{mm}}$$

9. On détermine la position A' correspondant au cas $r = r_0 = R/n$. On reprend le résultat de la question 6, sachant qu'ici :

$$i = I_{\text{tot}} \quad ; \quad t = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad \sin i = \frac{1}{n} \quad ; \quad \cos i = \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} \quad ; \quad \frac{1}{\tan(\pi/2 - i)} = \tan i = \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}}$$

On obtient $\overline{CA'} = \dfrac{nR}{\sqrt{n^2-1}}$ puis $\overline{A'F'} = \overline{CF'} - \overline{CA'} = nR\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}\right)$. On termine en notant que les rayons passant par A' sont inclinés d'un angle $t - i = \frac{\pi}{2} - I_{\text{tot}}$ par rapport à l'axe, donc :

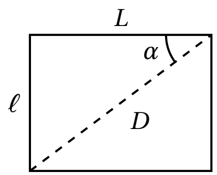
$$\text{TSA} = \overline{A'F'} \tan\left(\frac{\pi}{2} - i\right) = \sqrt{n^2-1} \times \overline{A'F'} \iff \boxed{\text{TSA} = nR\left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}} - 1\right) = 7{,}30\,\text{mm}}$$

Remarque : c'est une question difficile, mais pas insurmontable avec de l'habitude dans les calculs géométriques et trigonométriques.

10. Un milieu dont l'indice de réfraction dépend de λ est appelé **dispersif**. Si la lentille est éclairée en lumière blanche, on va observer **une décomposition de la lumière en ses différentes couleurs du domaine visible**. C'est le phénomène à l'origine des **aberrations chromatiques** de la lentille.

11. La longueur d'onde la plus faible est celle de la radiation bleue. D'après la loi de Cauchy l'indice de réfraction du verre est une fonction décroissante de λ donc l'indice est plus important pour le bleu que pour le rouge. Cela signifie que pour la réfraction en I, la variation d'indice (entre n et 1) est plus importante pour le bleu que pour le rouge. Le rayon bleu est davantage dévié donc F'_b **est plus proche de la lentille que** F'_r.

12. On représente schématiquement les dimensions du capteur. L'angle α vérifie $\tan\alpha = \frac{\ell}{L} \iff \alpha = \arctan\left(\frac{3}{4}\right) = 36{,}9°$. On en déduit les dimensions du capteur :



$$\boxed{L = d\cos\alpha = 6{,}77\,\text{mm}} \quad \text{et} \quad \boxed{\ell = d\sin\alpha = 5{,}08\,\text{mm}}$$

13. Il y a 4 000 pixels sur la grande dimension du capteur : $L = 4000\,\delta \iff \boxed{\delta = \dfrac{L}{4000} = 1{,}69\,\mu\text{m}}$

14. On s'intéresse au domaine du visible (λ compris entre 400 nm et 750 nm). On choisit la longueur d'onde maximale car c'est elle qui produit la plus grande tâche de diffraction et donc a l'effet le plus sensible. La tâche de diffraction a pour rayon $\boxed{r = 2{,}0\,\mu\text{m}}$.

15. Dans le rouge la tâche de diffraction est plus grande qu'un pixel. Cela peut avoir un effet sensible sur la qualité de l'image si l'on conserve le fichier brut issu du capteur. Réduire la résolution de la prise de vue signifie que les données venant de plusieurs pixels proches sont moyennées et lissées, ce qui fait perdre de l'information mais allège le poids du fichier obtenu. Pour faire simple tout se passe comme si le capteur avait des pixels moins nombreux et plus gros. En passant du 4K au full HD on "double" la taille des pixels ce qui fait que la qualité de l'image n'est plus limitée par la diffraction. En résumé il ne sert à rien d'utiliser un capteur ultra-défini si la qualité d'image est limitée par d'autres facteurs ! Dans le cas présent l'entreprise configure par défaut la prise d'image en full HD car elle pense (sans doute à raison) que la majorité des utilisateurs privilégieront un important gain de mémoire à un léger gain de qualité d'image.

16. La valeur moyenne vaut $\boxed{\overline{f'_{\text{mes}}} = 24{,}60\,\text{cm}}$ et l'écart-type $\sigma(f'_{\text{mes}}) = 0{,}47\,\text{cm}$. On en déduit que l'incertitude-type de type A vaut $\boxed{u\left(\overline{f'_{\text{mes}}}\right) = \dfrac{\sigma(f'_{\text{mes}})}{\sqrt{6}} = 0{,}19\,\text{cm}}$ (valeurs obtenues avec le mode STAT de la calculatrice).

17. L'incertitude-type (de type B) sur la valeur du fabriquant vaut :

$$u\left(f'_{\text{fab}}\right) = \frac{0{,}02 \times 25{,}0}{\sqrt{3}} = 0{,}29\,\text{cm}$$

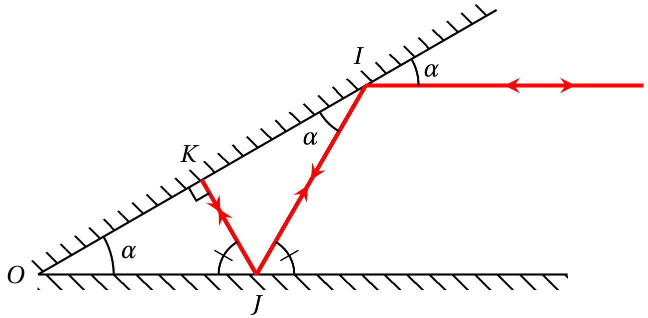
On calcule l'écart normalisé entre la valeur du fabriquant et la valeur mesurée :

$$\boxed{\text{EN} = \frac{\left|\overline{f'_{\text{mes}}} - f'_{\text{fab}}\right|}{\sqrt{u\left(\overline{f'_{\text{mes}}}\right)^2 + u(f'_{\text{fab}})^2}} = 1{,}2 < 2}$$

La valeur mesurée est compatible avec la tolérance proposée par le fabriquant.

Exercice 3 : Miroirs formant un coin

On annote le schéma de l'énoncé :



Pour émerger des miroirs en suivant le même chemin en sens inverse, il faut nécessairement qu'à mi-chemin, le rayon subisse une réflexion sous incidence normale (en K).

En I, l'angle entre le rayon incident et le miroir est égal à α (angles correspondants). On retrouve par symétrie (loi de la réflexion) : $\widehat{KIJ} = \alpha$.

Dans le triangle IKJ rectangle en K: $\widehat{IJK} = \frac{\pi}{2} - \alpha$. En exploitant à nouveau la symétrie par rapport à la normale en J, on montre que :

$$2\widehat{OJK} = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\pi}{2} + \alpha \iff \widehat{OJK} = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}$$

Pour terminer, on exploite la somme des angles du triangle OJK :

$$\alpha + \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \iff \frac{3\alpha}{2} = \frac{\pi}{4} \implies \boxed{\alpha = \frac{\pi}{6}\,\text{rad} = 30°}$$