Fiche d'exercices : Fonctions usuelles

Exercice 1 Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$x \mapsto \sqrt[3]{x} \ ; \ x \mapsto xe^{\sin x} \ ; \ x \mapsto \sin\sqrt{x} \ ; \ x \mapsto \ln(\ln(\ln x)) \ ; \ x \mapsto \sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{x}}}.$$

Exercice 2 Étudier la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{4x-1}{3-x}\right)$, montrer qu'elle définit une bijection entre deux intervalles que l'on précisera et déterminer son application réciproque.

Exercice 3 Calculer la dérivée n^e des fonctions suivantes :

$$x \mapsto x^p \, (p \in \mathbb{N}) \ ; \ x \mapsto \sin^3 x \ ; \ x \mapsto e^x \cos x.$$

Exercice 4 Soit $a+ib$ une racine n^e de l'unité $(a, b \in \mathbb{R})$. Calculer la dérivée n^e de la fonction $x \mapsto e^{ax}\cos bx$.

Exercice 5 Montrer que les courbes d'équations $y = x^2$ et $y = \dfrac{1}{x}$ ont une unique tangente commune.

Exercice 6 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$2\ln(2-x) + \ln(3x+1) = 2\ln 2 \ ; \ \ln x + \frac{1}{\ln x} = \frac{15}{4}.$$

Exercice 7 Étudier et représenter la fonction f définie par $f(x) = \ln(2x^3 - 3x^2 + 1)$.

Exercice 8

1) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

2) En déduire la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$.

Exercice 9 Étudier et représenter la fonction f définie par $f(x) = e^{-2x} + x$.

Exercice 10 Calculer $\displaystyle\lim_{x \to \ln 2} \frac{3e^{2x} - 12}{e^{2x} - 7e^x + 10}$.

Exercice 11 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

$$\operatorname{ch} x = 2 \ ; \ \operatorname{ch} x - 3\operatorname{sh} x = 2 \ ; \ \operatorname{sh}^2 x \leqslant \operatorname{ch} 2x - 3.$$

Exercice 12 Étudier la fonction tangente hyperbolique définie par $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$.

Exercice 13 Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(kx)$.

Exercice 14

1) Montrer que sh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et déterminer son application réciproque.

2) Montrer que ch définit une bijection de $[0, +\infty[$ dans $[1, +\infty[$ et déterminer son application réciproque.

Exercice 15 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^{x} \ ; \ 4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1} \ ; \ x^x = \frac{\sqrt{2}}{2} \ ; \ x^x = \frac{3\sqrt{6}}{4}.$$

Exercice 16 On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

1) Étudier les variations de f.

2) En déduire que pour tout $x \geqslant e^2$ on a $\sqrt{x}^{\sqrt{x+1}} > \sqrt{x+1}^{\sqrt{x}}$.

Exercice 17 Étudier et représenter la fonction $x \mapsto x^x$.

Exercice 18 Comparer e^π et π^e.

Exercice 19 Trouver les couples (n, p) d'entiers naturels non nuls tels que $n^p = p^n$.

Exercice 20 Étudier et représenter les fonctions suivantes :

$$x \mapsto 2\sin x + \sin 2x \ ; \ x \mapsto \cos^3(x)\cos(3x).$$

Exercice 21 Montrer que : $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\dfrac{2x}{\pi} \leqslant \sin x \leqslant x$.

Exercice 22 Montrer que :

$$\operatorname{Arccos}\frac{5}{7} + \operatorname{Arccos}\frac{7}{9} = \operatorname{Arccos}\frac{35-16\sqrt{3}}{63} \ ; \ \operatorname{Arctan}\frac{4}{3} = 2\operatorname{Arctan}\frac{1}{2}.$$

Exercice 23 Montrer que $\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{5} + \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{8} = \dfrac{\pi}{4}$:

1) À l'aide des formules d'addition.

2) En développant $(2+i)(5+i)(8+i)$.

Exercice 24 Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{x} = \varepsilon\dfrac{\pi}{2}$, où ε désigne le signe de x.

Exercice 25 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arccos} 2x = \frac{\pi}{2} \ ; \ \operatorname{Arcsin} 2x - \operatorname{Arcsin}\sqrt{3}x = \operatorname{Arcsin} x \ ; \ \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} 2x = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 26 Étudier les fonctions suivantes :

$$x \mapsto \operatorname{Arcsin}(\sin x) \ ; \ x \mapsto \operatorname{Arcsin}\left(x + \frac{1}{x}\right) \ ; \ x \mapsto \operatorname{Arctan}\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

Exercice 27

1) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{1+x+x^2} = \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{x} - \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{1+x}$.

2) Simplifier $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \operatorname{Arctan}\frac{1}{1+k+k^2}$ et calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} S_n$.