Correction du DNS 4

EXERCICE 1

1) On a :

$$Z = \frac{(1+i\sqrt{3})^2}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}} = \frac{-2+2i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}} = \frac{(-2+2i\sqrt{3})(\sqrt{2}-i\sqrt{2})}{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})(\sqrt{2}-i\sqrt{2})} = \frac{-2\sqrt{2}+2\sqrt{6}+i(2\sqrt{6}+2\sqrt{2})}{4} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}+i\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2}.$$

2) On a facilement $1+i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$ et $\sqrt{2}+i\sqrt{2} = 2e^{i\pi/4}$ donc $Z = \dfrac{4e^{2i\pi/3}}{2e^{i\pi/4}} = 2e^{5i\pi/12}$.

3) Par identification des parties réelle et imaginaire de Z trouvées en 1) et en 2) on obtient

$$\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \text{ et } \sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

EXERCICE 2

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\cos x + \cos(3x) = \cos(2x) &\Leftrightarrow 2\cos\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2} = \cos(2x)\\
&\Leftrightarrow 2\cos(2x)\cos x = \cos(2x)\\
&\Leftrightarrow 2\cos(2x)\cos x - \cos(2x) = 0\\
&\Leftrightarrow \cos(2x)(2\cos x - 1) = 0\\
&\Leftrightarrow \cos(2x) = 0 \text{ ou } \cos x = 1/2\\
&\Leftrightarrow (\exists\, k \in \mathbb{Z}, 2x = \pi/2 + k\pi) \text{ ou } (\exists\, k \in \mathbb{Z}, x = \pi/3 + 2k\pi) \text{ ou } (\exists\, k \in \mathbb{Z}, x = -\pi/3 + 2k\pi)\\
&\Leftrightarrow (\exists\, k \in \mathbb{Z}, x = \pi/4 + k\pi/2) \text{ ou } (\exists\, k \in \mathbb{Z}, x = \pi/3 + 2k\pi) \text{ ou } (\exists\, k \in \mathbb{Z}, x = -\pi/3 + 2k\pi).
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$\{\pi/4 + k\pi/2 \,|\, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi/3 + 2k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\pi/3 + 2k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}.$$

EXERCICE 3

1) Voilà un programme possible :

```
somme = 0
for k in range(1, 1000001):
    somme = somme + 1/k   # ou somme += 1/k
print(somme)
```

2) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $H_{n+1} - H_n = \dfrac{1}{n+1} > 0$, donc la suite (H_n) est strictement croissante.

b) Posons $u_n = H_{2n} - H_n$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= H_{2n+2} - H_{n+1} - (H_{2n} - H_n)\\
&= H_{2n+2} - H_{2n} - (H_{n+1} - H_n)\\
&= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}\\
&= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0
\end{aligned}$$

donc la suite (u_n) est strictement croissante.

c) Raisonnons par l'absurde : supposons que la suite (H_n) est convergente. Notons ℓ sa limite. Alors la suite de terme général H_{2n} tend aussi vers ℓ, et donc la suite de terme général $H_{2n} - H_n$ tend vers 0. Or cette suite est positive et strictement croissante (d'après le b)) donc elle ne peut pas tendre vers 0 : contradiction.

La suite (H_n) n'est donc pas convergente.

3) a) Les fonctions f et g sont dérivables sur $]1, +\infty[$ et pour tout $x > 1$ on a

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2(x+1)} > 0$$

et
$$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^2(x-1)} < 0$$
donc f est strictement croissante et g strictement décroissante sur $]1, +\infty[$.

On a sans difficultés $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \ln 2 - 1$ et $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = +\infty$.

On a également $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\ln \frac{x+1}{x} - \frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right) = 0$.

De même $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\ln \frac{x}{x-1} - \frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\ln\left(1+\frac{1}{x-1}\right) - \frac{1}{x}\right) = 0$.

b) D'après la question précédente f est négative et g est positive sur $]1, +\infty[$.

Pour tout $x > 1$ on a donc $\ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x} \leqslant 0$ et $\ln x - \ln(x-1) - \frac{1}{x} \geqslant 0$, soit
$$\ln(x+1) - \ln x \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \ln x - \ln(x-1).$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$ on a $\ln(k+1) - \ln k \leqslant \frac{1}{k}$, donc $\sum\limits_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln k) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, ce qui donne $\ln(n+1) \leqslant H_n$ (la première somme est télescopique).

D'autre part on a $\frac{1}{k} \leqslant \ln k - \ln(k-1)$ pour tout $k \in \{2, \ldots, n\}$, donc $\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \sum\limits_{k=2}^{n} (\ln k - \ln(k-1))$, d'où après télescopage $H_n - 1 \leqslant \ln n$ et donc $H_n \leqslant \ln n + 1$.

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n = +\infty$ également.

4) a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a $\frac{a}{k} + \frac{b}{k+n} = \frac{a(k+n) + bk}{k(k+n)} = \frac{(a+b)k + an}{k(k+n)}$. Pour avoir $(a+b)k + an = 1$ il suffit que $\begin{cases} a+b = 0 \\ an = 1 \end{cases}$ ce qui équivaut à $\begin{cases} b = -1/n \\ a = 1/n \end{cases}$. On a donc
$$\frac{1}{k(k+n)} = \frac{1}{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{n}\frac{1}{k+n}$$
pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

b) On a donc :
$$\begin{aligned} S_p &= \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k(k+n)} \\ &= \sum_{k=1}^{p} \left(\frac{1}{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{n}\frac{1}{k+n}\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k+n}\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k}\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} - \left(\sum_{k=1}^{n+p} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)\right) \\ &= \frac{1}{n}(H_p - (H_{n+p} - H_n)) \\ &= \frac{H_n + H_p - H_{n+p}}{n}. \end{aligned}$$

c) On a $H_{n+p} - H_p = \sum\limits_{k=1}^{n+p} \frac{1}{k} - \sum\limits_{k=1}^{p} \frac{1}{k} = \sum\limits_{k=p+1}^{n+p} \frac{1}{k}$ donc en procédant comme en 4)b) on a
$$\sum_{k=p+1}^{n+p} (\ln(k+1) - \ln k) \leqslant H_{n+p} - H_p \leqslant \sum_{k=p+1}^{n+p} (\ln k - \ln(k-1))$$

soit après télescopage

$$\ln(n+p+1)-\ln(p+1)\leqslant H_{n+p}-H_p\leqslant \ln(n+p)-\ln p.$$

Or

$$\ln(n+p+1)-\ln(p+1)=\ln\frac{n+p+1}{p+1}=\ln\left(1+\frac{n}{p+1}\right)\xrightarrow{p\to+\infty}0$$

et

$$\ln(n+p)-\ln(p)=\ln\frac{n+p}{p}=\ln\left(1+\frac{n}{p}\right)\xrightarrow{p\to+\infty}0$$

donc d'après le théorème des gendarmes $H_{n+p}-H_p\xrightarrow{p\to+\infty}0$.

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}S_p=\dfrac{H_n}{n}$.