CHAPITRE 6

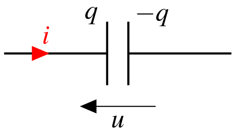
Régime transitoire du premier ordre

1 Modélisation d’un condensateur et d’une bobine

1.1 Condensateur idéal

1.1.1 Relation courant-tension

Un condensateur est un composant constitué de deux armatures conductrices séparées par un isolant électrique. Son symbole est représenté ci-dessous.



Lorsqu’on impose une tension aux bornes d’un condensateur un courant peut circuler malgré la présence de l’isolant. Les charges transportées par ce courant s’accumulent sur les armatures et on dit que le condensateur **est chargé**. Par la suite on supposera qu’un condensateur est toujours globalement électriquement neutre, c’est-à-dire que les charges portées par les deux armatures sont opposées ($\pm q$). On dit qu’un condensateur est **déchargé** si $q = 0$.

Remarque : les armatures d’un condensateur ne peuvent pas se charger sans limite, ce qui implique qu’**un condensateur ne peut pas fonctionner avec un courant continu**.

Relation courant-tension d’un condensateur idéal

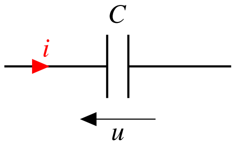
La charge d’un condensateur est proportionnelle à la tension que l’on impose à ses bornes :

$$\boxed{q = Cu}$$

La constante de proportionnalité C s’appelle **la capacité** du condensateur. Elle se mesure en farad (F). Au laboratoire les capacités varient typiquement entre quelques nanofarads (nF) et quelques microfarads (µF). Cette relation est admise mais sera démontrée en deuxième année dans le cours d’électromagnétisme.

En convention récepteur la relation courant-tension d’un condensateur idéal est la suivante :

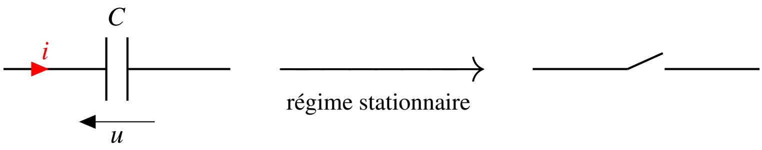
$$\boxed{i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}}$$



1.1.2 Comportement en régime stationnaire

Modèle équivalent en régime stationnaire

Si l'on se place en régime stationnaire avec une tension $u(t) = U = \text{Cste}$ alors la relation courant-tension indique que $i = 0 \ \ \forall t$. En régime stationnaire un condensateur interdit le passage du courant et se comporte comme un **interrupteur ouvert**.



1.1.3 Énergie stockée

Énergie électrique stockée par un condensateur

Contrairement à un résistor, un condensateur ne dissipe pas l'énergie qu'il reçoit du circuit. Il la stocke sous la forme d'un champ électrique généré entre ses armatures. Un condensateur chargé sous une tension u stocke une quantité d'énergie électrique :

$$\boxed{\mathscr{E}_e = \frac{1}{2}Cu^2}$$

• Un condensateur qui se charge se comporte comme un récepteur électrique. Le travail électrique qu'il reçoit du circuit est stockée sous forme d'énergie électrique.

• Un condensateur qui se décharge se comporte comme un générateur électrique. L'énergie électrique stockée est restituée au circuit sous forme d'un travail électrique fourni.

1.1.4 Bilan d'énergie d'un condensateur entre deux dates

Le travail électrique reçu du circuit est intégralement converti en énergie électrique stockée par le condensateur. En termes mathématiques cela signifie que la variation de l'énergie stockée par le condensateur $\Delta\mathscr{E}_e = \mathscr{E}_e(t_2) - \mathscr{E}_e(t_1)$ entre deux dates t_1 et t_2 est exactement égale au travail électrique reçu du circuit entre ces deux dates :

$$\Delta\mathscr{E}_e = W_{\text{reçu}} \iff \boxed{\frac{1}{2}C\left(u^2(t_2) - u^2(t_1)\right) = \int_{t_1}^{t_2} u(t)i(t)\mathrm{d}t}$$

1.1.5 Continuité

Continuité imposée par un condensateur

Un condensateur ne peut pas échanger instantanément une quantité finie d'énergie. Cela implique **qu'un condensateur impose à tout instant la continuité de la tension à ses bornes**.

En revanche rien n'interdit *a priori* que l'intensité dans la branche d'un condensateur soit discontinue.

1.2 Bobine idéale

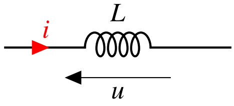
1.2.1 Relation courant-tension

Une bobine est un composant réalisé avec un enroulement de fil conducteur. Son comportement électrique repose sur un phénomène physique appelé *induction électromagnétique* (au programme de première année). Lorsqu'une bobine est parcourue par un courant d'intensité **variable** $i(t)$ une tension apparaît à ses bornes.

Relation tension-courant d'une bobine idéale

En convention récepteur la relation tension-courant d'une bobine idéale s'écrit sous la forme :

$$\boxed{u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}}$$

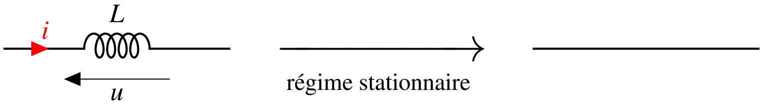


La constante de proportionnalité L s'appelle **l'inductance** de la bobine. Elle se mesure en henry (H). Au laboratoire les inductances varient typiquement entre quelques millihenry (mH) et environ 1 henry.

1.2.2 Comportement en régime stationnaire

Modèle équivalent en régime stationnaire

Si l'on se place en régime stationnaire avec un intensité $i(t) = I = \text{Cste}$ alors la relation tension-courant indique que $u = 0 \ \forall t$. En régime stationnaire une bobine se comporte comme un **court-circuit**.



1.2.3 Énergie stockée

Énergie magnétique stockée par une bobine

Comme un condensateur, une bobine ne dissipe pas l'énergie qu'elle reçoit du circuit. Elle la stocke sous la forme d'un champ magnétique créé à l'intérieur de l'enroulement. Une bobine parcourue par un courant d'intensité $i(t)$ stock une énergie magnétique :

$$\boxed{\mathscr{E}_m = \frac{1}{2}Li^2}$$

• Lorsque l'intensité qui parcourt une bobine augmente (en valeur absolue) celle-ci se comporte comme un récepteur électrique. Le travail électrique qu'elle reçoit du circuit est stockée sous forme d'énergie magnétique.

• Lorsque l'intensité qui parcourt une bobine diminue (en valeur absolue) celle-ci se comporte comme un générateur électrique. L'énergie magnétique stockée est restituée au circuit sous forme d'un travail électrique fourni.

1.2.4 Bilan d'énergie d'une bobine entre deux dates

Le travail électrique reçu du circuit est intégralement converti en énergie magnétique stockée par la bobine. En termes mathématiques cela signifie que la <u>variation</u> de l'énergie stockée par la bobine $\Delta\mathscr{E}_m = \mathscr{E}_m(t_2) - \mathscr{E}_m(t_1)$ entre deux dates t_1 et t_2 est exactement égale au travail électrique reçu du circuit entre ces deux dates :

$$\Delta\mathscr{E}_m = W_{\text{reçu}} \iff \boxed{\frac{1}{2}L\left(i^2(t_2) - i^2(t_1)\right) = \int_{t_1}^{t_2} u(t)i(t)\mathrm{d}t}$$

1.2.5 Continuité

Continuité imposée par une bobine

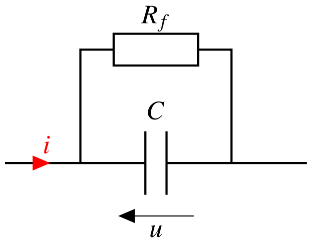
Une bobine ne peut pas échanger instantanément une quantité finie d'énergie. Cela implique **qu'une bobine impose à tout instant la continuité de l'intensité du courant qui la parcourt**.

En revanche rien n'interdit *a priori* que la tension aux bornes d'une bobine soit discontinue.

1.3 Condensateur réel et bobine réelle

1.3.1 Condensateur réel

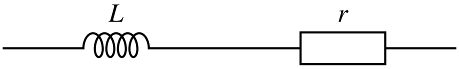
En théorie un condensateur chargé que l'on déconnecte du circuit doit garder une charge q constante puisque les électrons ne peuvent plus circuler. En pratique on observe une décharge très lente. Cela s'explique par le fait que l'isolant qui sépare les armatures n'est pas parfait. Des électrons peuvent passer d'une armature à l'autre en le traversant. Ce courant, généralement très faible, est appelé *courant de fuite*. On modélise souvent le courant de fuite par une résistance R_f connectée entre les deux armatures. La résistance R_f, très élevée, est appelée *résistance de fuite*.



modèle de condensateur réel

1.3.2 Bobine réelle

La fabrication d'une bobine nécessite généralement une grande longueur de fil conducteur, si bien que la résistance électrique, généralement négligée dans un fil de courte longueur, peut devenir notable. D'un point de vue électrique une bobine réelle peut être vue, en régime lentement variable, comme l'association en série d'une bobine idéale et d'une résistance r, appelée *résistance interne* de la bobine, typiquement de l'ordre de quelques ohms pour les bobines utilisées en TP.



Modèle de bobine réelle

En régime alternatif, notamment pour des fréquences dépassant le kilohertz, le comportement d'une bobine diverge de ce modèle simple. Sa résistance interne augmente avec la fréquence (phénomène appelé *effet de peau*, traité en deuxième année) et elle présente des effets capacitifs. Il existe d'autres modèles pour décrire ces phénomènes, que nous n'aborderons pas ici.

1.4 Étude d'un régime transitoire en électricité

Dans un circuit électrique qui contient un condensateur et/ou une bobine, un régime transitoire se produit si le circuit subit une transformation brutale, comme par exemple :

- allumer ou éteindre un générateur,
- faire basculer un interrupteur.

On suppose que cette modification se produit à la date $t = 0$ et on s'intéresse aux variations d'une grandeur électrique quelconque du circuit, notée de façon générique y (en pratique il s'agit le plus souvent d'une tension ou une intensité). Dans ce chapitre l'objectif consiste à déterminer $y(t) \;\; \forall t > 0$ et à mettre en évidence les propriétés du régime transitoire (sa durée notamment). Dans les grandes lignes, l'étude mathématique d'un régime transitoire en électricité se décompose en différentes étapes :

- Montrer que la grandeur $y(t)$ recherchée est solution d'une équation différentielle ;
- utiliser la forme canonique de cette équation pour identifier un temps caractéristique τ ;

- déterminer la condition initiale $y(t=0^+)$;
- résoudre l'équation différentielle pour obtenir $y(t)\ \ \forall t>0$;
- éventuellement effectuer un bilan énergétique traduisant les échanges d'énergie dans le circuit au cours du régime transitoire.

Dans les parties suivantes nous allons détailler les méthodes qui permettent de réaliser chacune de ces étapes.

2 Établir une équation différentielle

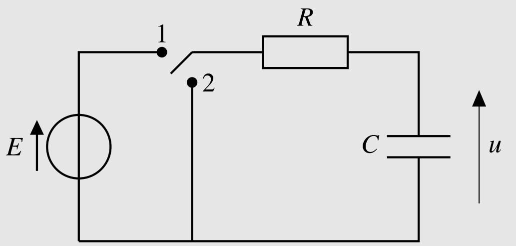
2.1 Circuit à une maille

En résumé

- Appliquer la loi des mailles ;
- Utiliser les relations courant-tension nécessaires (résistor, bobine, condensateur) pour obtenir l'équation différentielle vérifiée par la grandeur $y(t)$ recherchée ;
- Écrire l'équation sous forme canonique ;
- Identifier la constante de temps τ du circuit.

Exemple

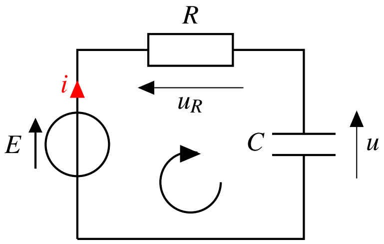
Dans le circuit *RC* série ci-contre l'interrupteur est initialement dans la position 2. On le bascule à la date $t=0$ dans la position 1.



Établir l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ pour $t>0$ et identifier la constante de temps du circuit.

▶ **Annoter le schéma + appliquer la loi des mailles**

On représente le schéma pour $t>0$ (interrupteur en position 1) et on l'annote avec les grandeurs manquantes pour faciliter la compréhension du lecteur. On applique ensuite la loi des mailles : $E=u_R+u$.



► Utiliser les relations courant-tension

La loi des mailles fait apparaître deux inconnues : $u(t)$ et $u_R(t)$. Notre objectif consiste à obtenir l'équation différentielle vérifiée par la seule inconnue $u(t)$; il s'agit donc de faire "disparaître" $u_R(t)$. Pour cela on utilise la loi d'Ohm et la relation tension-courant du condensateur (les deux dipôles sont ici en convention récepteur) :

$$u_R = Ri = RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

On aboutit finalement à l'équation différentielle suivante :

$$\boxed{RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u = E}$$

⚠ Soyez très attentif à la **convention** quand vous écrivez une loi courant-tension, sous peine de faire une erreur de signe !

► Écrire l'équation sous forme canonique et identifier la constante de temps

Équation canonique associée à régime transitoire du premier ordre

On parle de régime transitoire du premier ordre lorsqu'une grandeur physique $y(t)$ est solution d'une équation différentielle du type :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{y}{\tau} = b$$

avec b une fonction quelconque du temps appelée *second membre* de l'équation différentielle. Dans ce chapitre on traitera uniquement le cas où b est une fonction **constante**. On notera par la suite $b(t) = b_0 \ \forall t > 0$.

Le terme τ est homogène à un temps. On l'appelle **constante de temps** (ou *temps caractéristique*) du circuit.

Remarque : Retenez que la forme canonique se caractérise par le fait que le coefficient en facteur de la dérivée première $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ est égal à 1.

Remarque : Le mot "canonique" signifie *standard*, *conventionnel*. Écrire l'équation associée à un régime transitoire du premier ordre sous sa forme canonique permet d'identifier immédiatement la constante de temps τ du circuit.

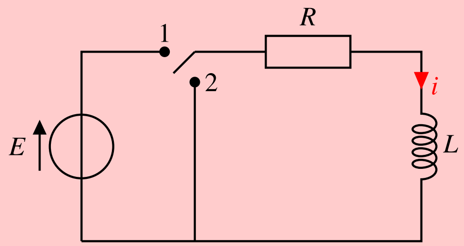
Dans le cas présent la fonction "y" recherchée est la tension u aux bornes du condensateur. Il suffit de diviser l'équation différentielle obtenue précédemment par RC pour l'obtenir sous sa forme canonique :

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{RC} = \frac{E}{RC}$$

On identifie la constante de temps du circuit : $\boxed{\tau = RC}$. On note au passage que le second membre est constant : $b_0 = \frac{E}{RC}$.

Application 1

Dans le circuit RL série ci-contre l'interrupteur est initialement dans la position 2. On le bascule à la date $t = 0$ dans la position 1.



Établir l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$ pour $t > 0$ et identifier la constante de temps du circuit.

2.2 Circuit à deux mailles

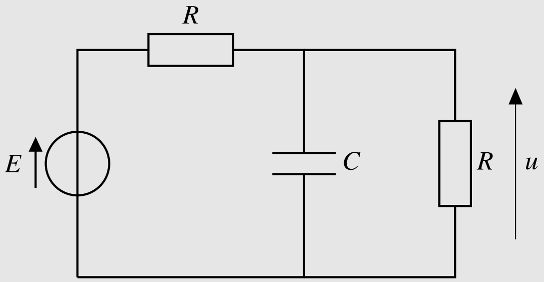
Le cas d'un circuit à deux mailles est un peu plus technique car il y a davantage d'équations à manipuler (loi des mailles, loi des nœuds, relations courant-tension).

En résumé

- Écrire une loi des nœuds ou une loi des mailles faisant intervenir la grandeur y recherchée ;
- Exprimer, en fonction de y, toutes les inconnues autres que y en "tirant sur le fil" (voir l'exemple suivant);
- Écrire l'équation sous forme canonique ;
- Identifier la constante de temps τ du circuit.

Exemple

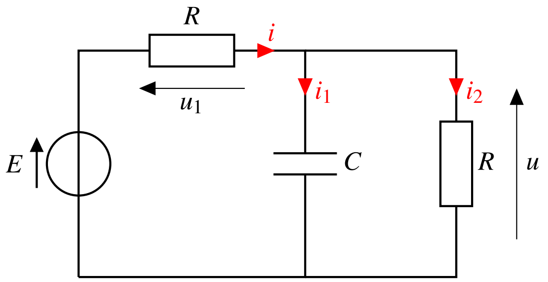
Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la tension u dans le circuit ci-dessous et identifier la constante de temps :



▶ Annoter le schéma + écrire une première relation

Comme première équation faisant intervenir la tension u recherchée on écrit la loi des mailles :

$$E = u + u_1$$



▶ On tire sur le fil

Dans cette loi des mailles il y a deux inconnues : u et u_1 (E, ainsi que R et C, font partie des données de l'énoncé). Comme dans l'exemple du circuit à une seule maille on cherche à exprimer u_1 en fonction de u, en utilisant toute relation (loi des mailles, loi des nœuds, relation courant-tension) à notre disposition, **autre que la première loi utilisée**. Pour faciliter cette tâche on propose la méthode suivante, dite du "fil qu'on tire", qui consiste à exprimer en fonction de u toutes les inconnues autres que u, **en partant de la plus directe**.

Dans le cas présent les inconnues autres que u sont i, i_1, i_2 et u_1. Parmi elles les plus simples à relier à u sont les intensités i_1 et i_2 : on écrit la relation tension-courant du condensateur et la loi d'Ohm (vigilance $\rightarrow$ on vérifie la **convention**) :

$$i_1 = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \quad \text{et} \quad i_2 = \frac{u}{R}$$

On écrit ensuite la loi des nœuds : $i = i_1 + i_2 = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u}{R}$.

Enfin on applique la loi d'Ohm : $u_1 = Ri = RC\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u$.

▶ Écrire l'équation sous forme canonique et identifier la constante de temps

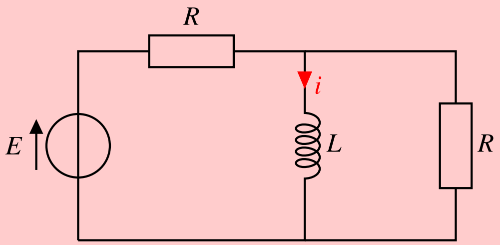
On est arrivé là où on voulait, écrire u_1 en fonction de u. Il ne reste plus qu'à injecter cette expression dans notre première loi des mailles :

$$E = RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u + u \iff \boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{2u}{RC} = \frac{E}{RC}}$$

Par identification le second membre est $b_0 = \dfrac{E}{RC}$ et la constante de temps $\boxed{\tau = \dfrac{RC}{2}}$.

Application 2

Déterminer l'équation différentielle vérifiée par l'intensité i dans le circuit ci-dessous et identifier la constante de temps :



3 Déterminer une condition initiale

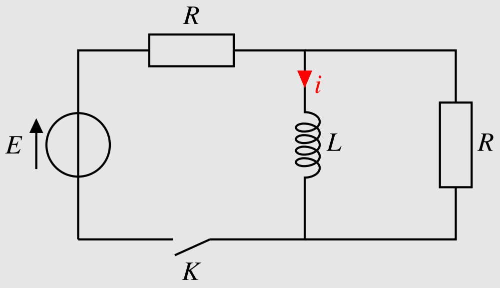
On rappelle que l'on suppose une modification brutale du circuit à l'instant initial $t = 0$. Déterminer la condition initiale sur la grandeur y recherchée signifie que l'on doit connaître sa valeur à l'instant $t = 0^+$, immédiatement après la modification du circuit.

En résumé

- Étudier le circuit à l'instant $t = 0^-$ et en déduire $y(0^-)$.
- Utiliser les continuités (tension aux bornes d'un condensateur, intensité dans la branche d'une bobine) pour obtenir $y(0^+)$.

Exemple

On considère le circuit ci-dessous contenant un interrupteur K qui permet d'ouvrir ou fermer la branche contenant le générateur.

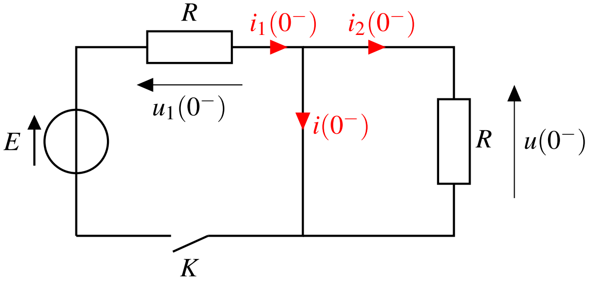


1. K est ouvert depuis longtemps et on le ferme à la date $t = 0$. Déterminer $i(0^+)$.

2. K est fermé depuis longtemps et on l'ouvre à la date $t = 0$. Déterminer $i(0^+)$.

1. L'interrupteur est ouvert depuis longtemps donc le circuit n'est pas alimenté : $i(0^-) = 0$. Or, l'intensité dans la branche d'une bobine est continue donc $\boxed{i(0^+) = i(0^-) = 0}$.

2. L'interrupteur est fermé donc le circuit est alimenté. Le fait qu'il soit fermé depuis longtemps indique que s'il y a eu un régime transitoire préalable (qui dure environ 5τ, voir partie 4) celui-ci est maintenant terminé et on considère que le circuit est maintenant en **régime stationnaire**. Pour déterminer $i(0^-)$ on trace un schéma équivalent dans lequel on remplace la bobine par un court-circuit.



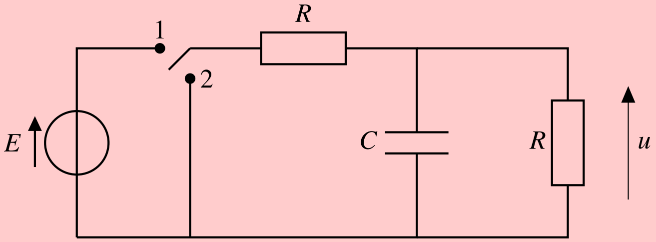
Le résistor de droite est court-circuité donc $u(0^-) = 0$ et d'après la loi d'Ohm $i_2(0^-) = 0$. On en déduit que $i_1(0^-) = i(0^-)$ (loi des nœuds). On applique la loi des mailles :

$$E = u_1(0^-) = Ri(0^-) \iff i(0^-) = \frac{E}{R}$$

Par continuité de l'intensité dans la branche de la bobine : $\boxed{i(0^+) = i(0^-) = \frac{E}{R}}$.

Application 3

On considère le circuit *RC* série ci-dessous.



1. *K* est depuis longtemps dans la position 2 et on le bascule dans la position 1 à la date $t = 0$. Déterminer $u(0^+)$.

2. *K* est depuis longtemps dans la position 1 et on le bascule dans la position 2 à la date $t = 0$. Déterminer $u(0^+)$.

4 Résoudre une équation différentielle du premier ordre

Solution générale de l'équation différentielle

Dans ce chapitre vous aurez à résoudre des équations différentielles linéaires du type :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{y}{\tau}=b_0$$

avec un second membre b_0 constant. La *solution générale* de cette équation (c'est-à-dire l'ensemble des solutions possibles) s'écrit sous la forme :

$$\boxed{y(t)=A\mathrm{e}^{-t/\tau}+y_p}$$

avec A un réel quelconque appelé *constante d'intégration* et y_p, dite *solution particulière*, est **la solution de l'équation sans dérivée** $\left(\frac{y_p}{\tau}=b_0\right)$.

En résumé

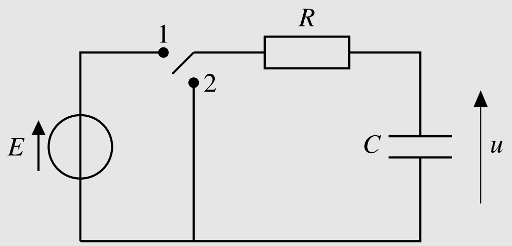
• Vérifier au préalable que votre équation est bien écrite sous forme canonique et que vous avez pu identifier la constante de temps τ.

• Résoudre l'équation sans dérivée pour obtenir la solution particulière y_p, puis écrire la solution générale.

• Si ce n'est pas encore fait déterminer la condition initiale $y(0^+)$. En déduire l'unique constante d'intégration A compatible avec la condition initiale.

• Éventuellement analyser le résultat obtenu (allure du graphe de $y(t)$, valeur asymptotique, durée du régime transitoire, etc).

Exemple



1. K est depuis longtemps dans la position 2 et on le bascule dans la position 1 à la date $t=0$. Déterminer $u(t)$ et tracer son graphe.
2. K est depuis longtemps dans la position 1 et on le bascule dans la position 2 à la date $t=0$. Déterminer $u(t)$ et tracer son graphe.

► Établir l'équation différentielle

1. On a montré dans l'exemple du paragraphe **2.1** que l'équation vérifiée par $u(t)$ est la suivante :

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{RC} = \frac{E}{RC}$$

La constante de temps est $\tau = RC$.

► Trouver la solution particulière

On résout l'équation sans dérivée pour trouver la solution particulière u_p :

$$\frac{u_p}{RC} = \frac{E}{RC} \iff u_p = E$$

La solution générale de l'équation s'écrit $u(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau} + E$.

► Déterminer la constante d'intégration

On cherche la condition initiale $u(0^+)$. Il est dit qu'à $t = 0^-$ l'interrupteur est en position 2 depuis longtemps. Le circuit n'est alors pas alimenté donc $u(0^-) = 0$. Par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur on conclut que $u(0^+) = u(0^-) = 0$.

La solution générale prévoit que $u(0^+) = A + E$. La seule valeur de A compatible avec la condition initiale vérifie :

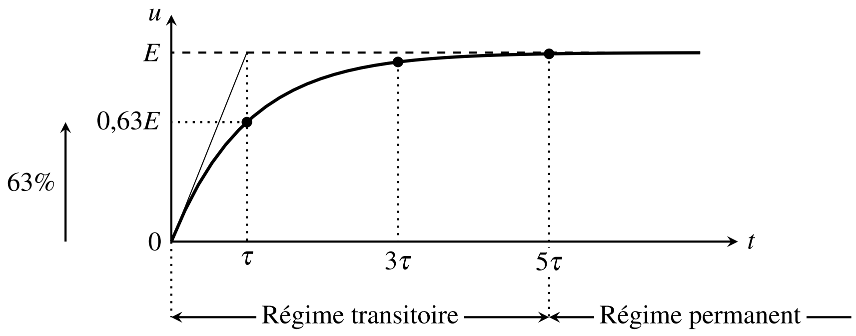
$$u(0^+) = A + E = 0 \iff A = -E$$

On conclut qu'à tout instant $t > 0$ la tension aux bornes du condensateur vaut :

$$\boxed{u(t) = E\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)}$$

► Tracer et analyser le graphe de la fonction obtenue

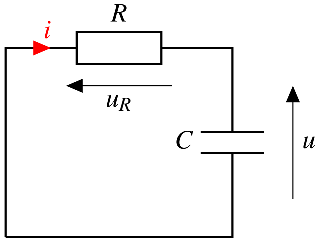
On trace ci-dessous l'allure du graphe de $u(t)$.



Retenez les propriétés principales de ce régime transitoire :

- L'évolution de $u(t)$ peut être séparée eu deux phases :
  - dans les premiers instants $u(t)$ varie et tend vers l'asymptote E, c'est le **régime transitoire** ;
  - après un certain temps on peut considérer qu'elle est quasi-constante : $u(t) \simeq E$, c'est le **régime permanent**.
- On considère que le régime transitoire dure 5τ ($u(5\tau) \simeq 0,993E$).
- On peut mesurer τ sur le graphe de deux manières différentes :
  - *méthode de la tangente à l'origine* : la tangente à l'origine croise l'asymptote à la date $t = \tau$;
  - *méthode des 63%* : au cours de ce régime transitoire la tension u varie de 0 (valeur initiale) à E (valeur asymptotique). À la date $t = \tau$ on a parcouru environ 63% de cet intervalle, c'est-à-dire que $u(\tau) = 0,63E$.
- Le condensateur est initialement déchargé. Au cours de ce régime transitoire **le condensateur se charge** grâce à l'action du générateur. En régime permanent il est chargé sous une tension E.

2. Désormais le circuit RC série est connecté à un court-circuit pour $t > 0$. On applique la loi des mailles :

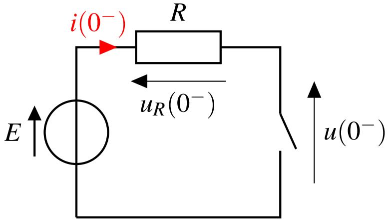


$$0 = u_R + u = Ri + u = RC\frac{du}{dt} + u$$

L'équation canonique s'écrit : $\boxed{\frac{du}{dt} + \frac{u}{RC} = 0}$.

La constante de temps est toujours $\tau = RC$. Il n'y a pas de solution particulière ($u_p = 0$) car le second membre est nul (on dit que l'équation différentielle est *homogène*). La solution générale s'écrit : $u(t) = Ae^{-t/\tau}$.

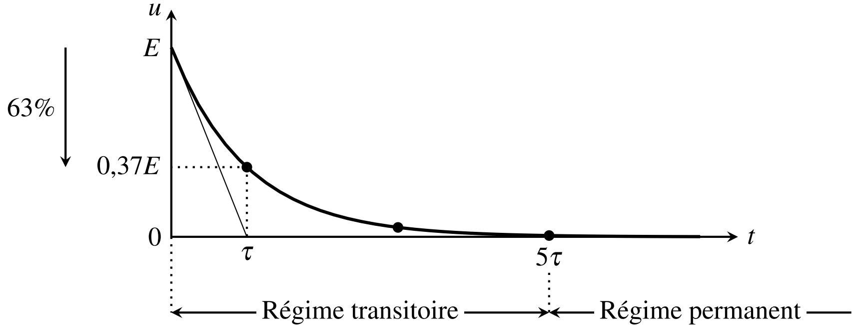
On cherche la condition initiale $u(0^+)$. On étudie d'abord le circuit à $t = 0^-$. L'interrupteur est en position 1 depuis longtemps, la source de tension est connectée et le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert car on est en régime permanent. Le schéma équivalent est représenté ci-contre.



Le circuit est ouvert donc $i(0^-) = 0$. D'après la loi d'Ohm $u_R(0^-) = 0$. D'après la loi des mailles $u(0^-) = E$.Enfin, par continuité de la tension aux bornes du condensateur, $u(0^+) = u(0^-) = E$.

Remarque : on a montré que $u(0^-) = E$, c'est cohérent avec le résultat de la question 1. En effet lors de la charge du condensateur la tension u tend vers E en régime permanent.

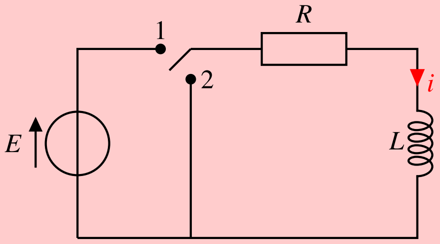
On trace l'allure du graphe de $u(t)$.



Le condensateur est initialement chargé sous une tension E. Au cours de ce régime transitoire **le condensateur se décharge** progressivement. La tension u tend vers zéro ; à la fin du régime transitoire, qui dure environ 5τ, il finit par être complètement déchargé.

Application 4

On considère le circuit RL série ci-dessous.



1. K est depuis longtemps dans la position 2 et on le bascule dans la position 1 à la date $t = 0$. Déterminer $i(t)$ et tracer son graphe.

2. K est depuis longtemps dans la position 1 et on le bascule dans la position 2 à la date $t = 0$. Déterminer $i(t)$ et tracer son graphe.

5 Effectuer un bilan énergétique

Dans ce chapitre on limite les bilans énergétiques à des circuits d'une seule maille. Pour l'essentiel il s'agit de calculer le travail électrique reçu ou fourni par un dipôle au cours d'un régime transitoire, c'est-à-dire généralement entre $t = 0$ et $t = +\infty$. On rappelle que pour un dipôle caractérisé par une tension u et une intensité i le travail électrique échangé avec le circuit entre ces deux dates vaut :

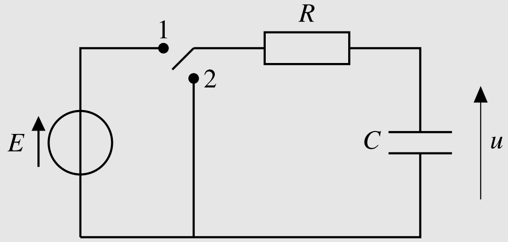
$$W = \int_0^{\infty} \pm u(t) i(t) \mathrm{d}t$$

avec le signe $\pm$ qui dépend de la convention choisie (générateur ou récepteur) et du sens du travail électrique (travail reçu ou travail fourni). Revoir le chapitre 4 si besoin.

Bien que l'on soit en régime variable on verra sur l'exemple suivant qu'il existe des techniques pour simplifier le calcul intégral des différents travaux électriques.

Exemple

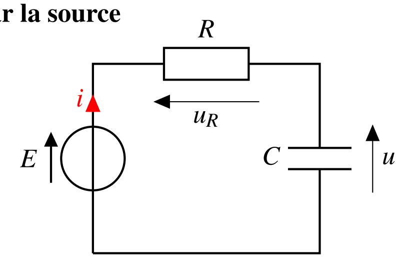
On considère le circuit RC série ci-dessous. K est depuis longtemps dans la position 2 et on le bascule dans la position 1 à la date $t = 0$. On admet que $u(0^+) = 0$ et $u(\infty) = E$.



1. Déterminer le travail électrique W_g fourni par la source, le travail électrique W_c reçu par le condensateur et le travail W_r reçu par le résistor au cours de la charge complète du condensateur.

2. On définit le rendement énergétique de la charge du condensateur par $\eta = W_c/W_g$. Calculer sa valeur.

► **Annoter le schéma + calculer le travail fourni par la source**



On représente le schéma pour $t > 0$ (interrupteur en position 1) et on l'annote. On commence par exprimer le travail électrique fourni par la source. On est en convention générateur donc :

$$W_g = \int_0^\infty E i(t) \mathrm{d}t = E \int_0^\infty i(t) \mathrm{d}t$$

Pour éviter d'avoir à calculer $i(t)$ puis à chercher sa primitive on utilise la relation tension-courant du condensateur :

$$W_g = E \int_0^\infty C \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t = CE \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t$$

La fonction $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ a naturellement comme primitive u :

$$W_g = CE\,[u]_0^\infty = CE\,(u(\infty) - u(0))$$

On connaît les valeurs de u en $t = 0$ et $t = +\infty$, ce qui permet de conclure :

$$W_g = CE\,(E - 0) \iff \boxed{W_g = CE^2}$$

► Mettre en œuvre le bilan d'énergie du condensateur

On a vu dans la première partie que le bilan d'énergie du condensateur entre $t = 0$ et $t = +\infty$ s'écrit sous la forme :

$$\Delta\mathscr{E}_e = \frac{1}{2}C\left(u^2(\infty) - u^2(0)\right) = W_c$$

On conclut connaissant les valeurs de u en $t = 0$ et $t = +\infty$:

$$\boxed{W_c = \frac{1}{2}CE^2}$$

Remarque : on peut retrouver ce résultat à partir de l'intégrale. En effet :

$$W_c = \int_0^\infty ui\mathrm{d}t = C\int_0^\infty u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$

or, en utilisant la propriété mathématique connue pour la dérivée du carré d'une fonction : $(u^2)' = 2u'u$, on peut transformer cette expression :

$$W_c = \frac{1}{2}C\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$

La fonction $\dfrac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}t}$ a naturellement comme primitive u^2 :

$$W_c = \frac{1}{2}C\left[u^2\right]_0^\infty = \frac{1}{2}C\left(u^2(\infty) - u^2(0)\right)$$

► Mettre en œuvre le bilan d'énergie du circuit entier

Une fois connus les travaux électriques W_g et W_c on peut en déduire rapidement le travail W_r. En effet on peut affirmer que le travail électrique fourni par la source est égal à la somme des travaux électriques reçus par le résistor et le condensateur (pas nécessaire de faire une démonstration, on a vu le principe au chapitre 4).

$$W_g = W_c + W_r \iff \boxed{W_r = W_g - W_c = \frac{1}{2}CE^2}$$

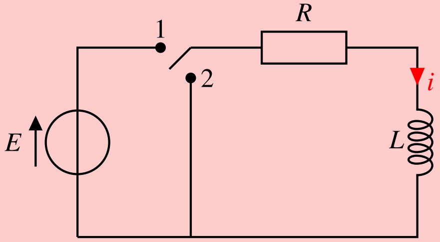
2. À partir des résultats précédents on conclut que $\boxed{\eta = \dfrac{W_r}{W_g} = \dfrac{1}{2}}$.

Un circuit RC série alimenté avec un échelon de tension de 0 à E permet de stocker de l'énergie électrique avec un rendement de **50%**.

Remarque : ce rendement énergétique est loin d'être idéal. La moitié de l'énergie dépensée pour charger le condensateur est dissipée par effet Joule dans le résistor. Avec le même circuit il est possible de faire mieux, en fractionnant la charge en plusieurs étapes (la méthode est illustrée dans l'un des exercices de ce chapitre).

Application 5

On considère le circuit RL série ci-dessous. K est depuis longtemps dans la position 2 et on le bascule dans la position 1 à la date $t = 0$. On admet que $i(0^+) = 0$ et $i(\infty) = E/R$.



1. Déterminer le travail électrique W_b reçu par la bobine entre $t = 0$ et $t = +\infty$.

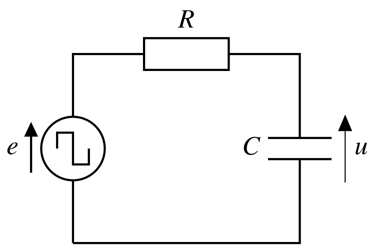
2. Tracer le schéma équivalent du circuit en régime permanent. Justifier sans calcul qu'en régime permanent la source fournit continûment de l'énergie au circuit. Que devient cette énergie ?

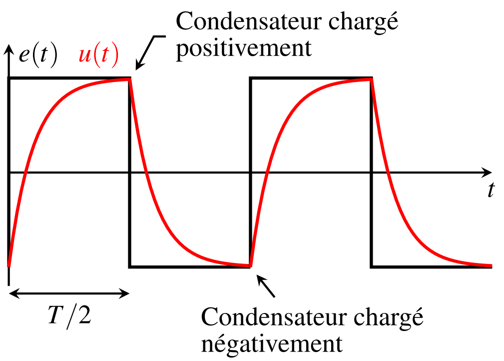
3. Justifier en quelques mots pourquoi un circuit RL série n'est pas adapté pour stocker de l'énergie électrique.

6 Observation d'un régime transitoire à l'oscilloscope (TP)

6.1 Charge/décharge d'un condensateur

On souhaite étudier la charge ou la décharge d'un condensateur dans un circuit RC série. Il est possible d'observer un régime transitoire unique en alimentant le circuit avec un générateur de tension continue et en faisant basculer un interrupteur, comme dans les exemples traités précédemment. Pour des raisons pratiques on préfère souvent se passer d'interrupteur et utiliser comme générateur un GBF délivrant une tension $e(t)$ alternative **rectangulaire**, qui simule une succession de charges positives ou négatives.





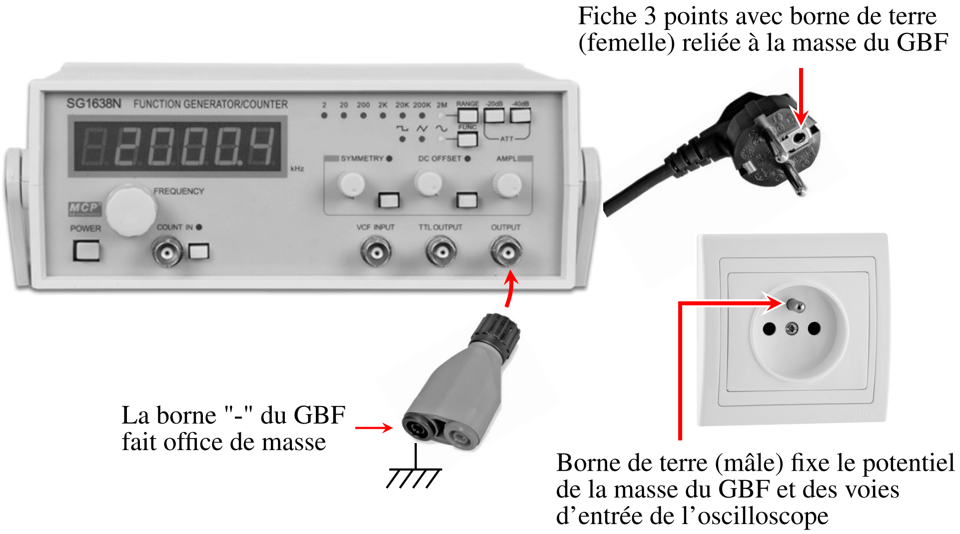
Remarque : le choix de la période T des oscillations de $e(t)$ est importante pour observer convenablement le régime transitoire dont la durée est d'environ 5τ. Sachant que chaque échelon de tension correspond à une demi-oscillation du signal rectangulaire (voir graphe de la page précédente), il est conseillé de choisir une fréquence $f = 1/T$ telle que :

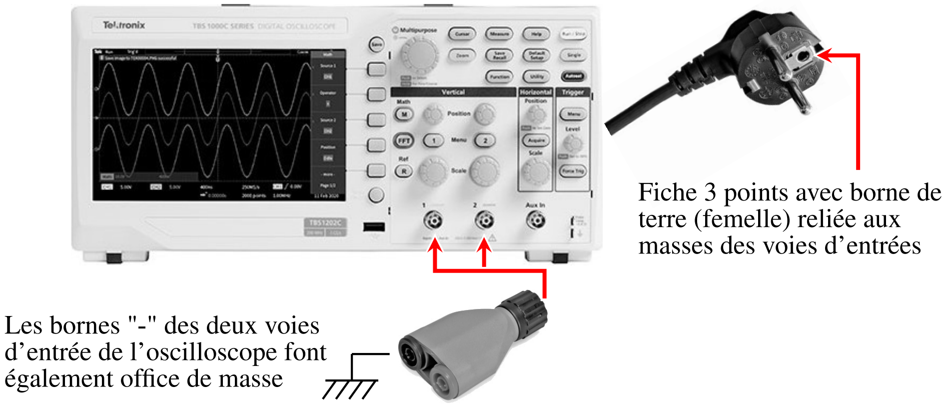
$$\frac{T}{2} = 5\tau \iff T = 10\tau \iff \boxed{f = \frac{1}{10\tau}}$$

6.2 Branchement de l'oscilloscope

6.2.1 Masse du GBF et des voies d'entrée de l'oscilloscope

La borne "-" de la sortie d'un GBF est connectée à la borne de terre via la fiche d'alimentation. Elle constitue la masse du GBF et son potentiel électrique est fixé par le secteur (c'est-à-dire le réseau EDF). Il en va de même pour les voies d'entrée de l'oscilloscope, dont les bornes "-" sont toutes les deux reliées à la terre.



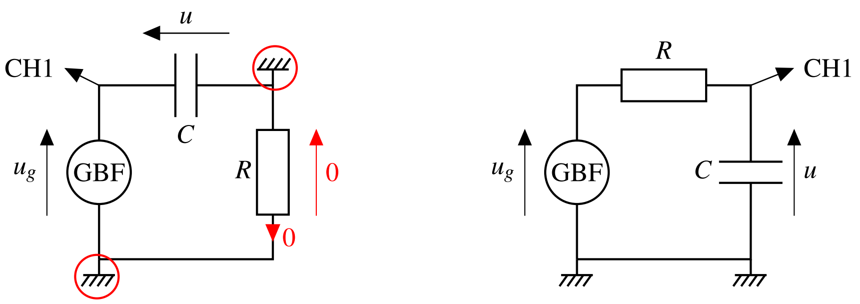


6.2.2 Conflits de masse

Il est important de retenir le point suivant :

> Les masses du GBF et des voies d'entrées de l'oscilloscope sont **au même potentiel électrique**, fixé arbitrairement à 0 V. Il faut y être vigilant lorsque l'on branche ces appareils, au risque de créer des **courts-circuits** à l'intérieur d'un montage.

On illustre le problème en proposant ci-dessous deux montages différents permettant d'observer à l'oscilloscope la tension aux bornes du condensateur.



✖ résistor court-circuité! ✓ pas de court-circuit

Sur le montage de gauche on trouve la masse du GBF d'un côté du résistor et la masse de la voie d'entrée 1 de l'oscilloscope de l'autre côté. Les deux bornes du résistor sont au potentiel nul donc la tension est nulle, le résistor est court-circuité ! Cela pose problème car d'après la loi d'Ohm cela implique que l'intensité dans le circuit est nulle, donc le condensateur ne peut ni se charger ni se décharger !

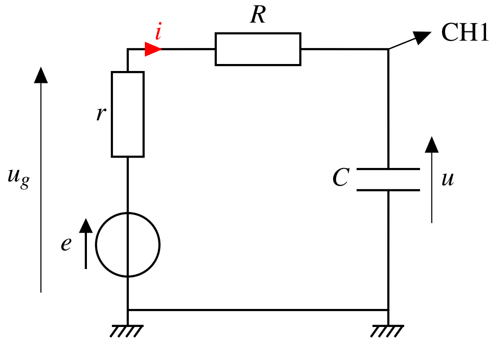
Sur le montage de droite les deux masses sont connectées au même point, il n'y a pas de court-circuit et on peut observer correctement la charge et la décharge du condensateur.

> **Règle d'or pour éviter les conflits de masse**
>
> Dans un circuit qui contient plusieurs appareils dont les masses sont connectées à la terre, il faut veiller à ce que **toutes les masses soient connectées au même point du circuit**.

Remarque : vous trouverez en salle de TP des générateurs de tension continue dits "à masse flottante". Leur borne "-" n'est pas reliée à la terre donc son potentiel électrique n'a pas une valeur fixe.

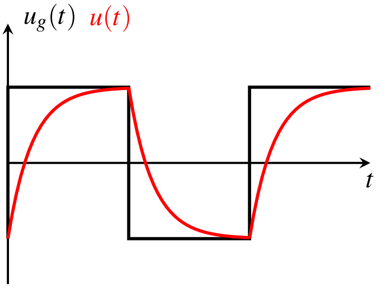
6.2.3 Influence de la résistance de sortie du GBF

On a vu qu'un GBF est un générateur linéaire de résistance de sortie $r = 50\,\Omega$. On montre ci-dessous un schéma équivalent du montage.

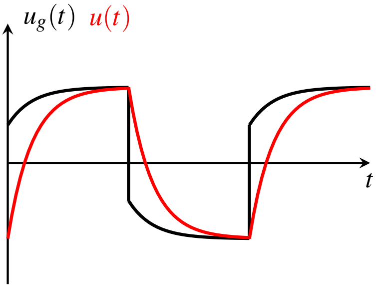


La présence de la résistance de sortie a deux conséquences notables :

- elle a une influence sur la constante de temps du circuit : $\boxed{\tau = (r+R)C}$;
- la tension aux bornes du GBF dépend de l'intensité : $u_g = e - ri$. Si l'intensité est suffisamment élevée alors la tension u_g, observée à l'oscilloscope, peut montrer un écart par rapport à la tension rectangulaire $e(t)$ (voir figure ci-dessous).



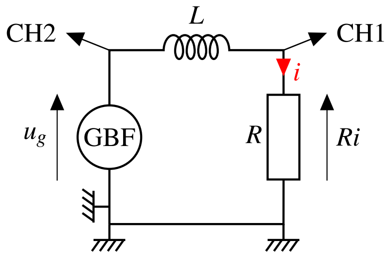
Tensions observées lorsque $r \ll R$



Tensions observées lorsque $r \simeq R$

6.3 Établissement/rupture du courant dans une bobine

On souhaite observer l'établissement ou la rupture du courant dans un circuit *RL* série. Là encore on utilise un GBF pour alimenter le circuit avec une tension $e(t)$ rectangulaire.



Idéalement on aimerait observer les variations de l'intensité $i(t)$, mais l'oscilloscope ne peut afficher que des tensions. On choisit donc d'observer **la tension aux bornes du résistor** car celle-ci est proportionnelle à l'intensité : $u_{\text{CH1}} = Ri$.

Le schéma ci-contre montre le montage à réaliser pour observer $Ri(t)$ sans conflit de masse. Notons que l'on peut tout à fait utiliser l'oscilloscope en mode bicourbe pour observer simultanément la tension u_g aux bornes du GBF et la tension Ri aux bornes du résistor. Les trois masses se trouvent bien au même endroit du circuit.