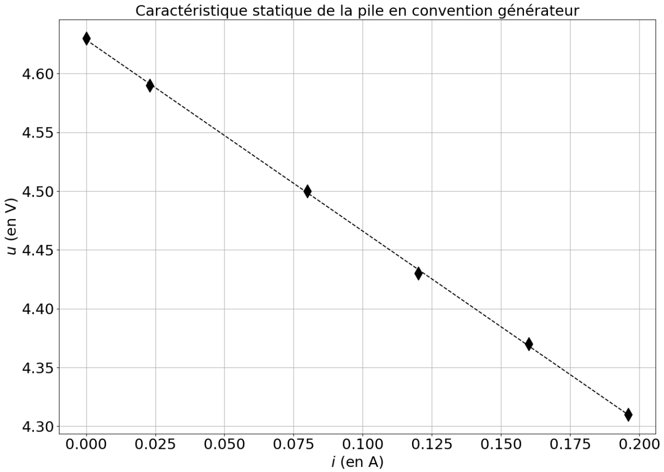
TD5 : Circuits linéaires - corrigé

Application 1

1. On trace ci-dessous la caractéristique statique de la pile.



On a tracé en pointillés le modèle affine obtenu par régression linéaire. Les points sont alignés, la caractéristique est une droite ne passant pas par l'origine donc la pile se comporte comme un générateur linéaire.

2. La force électromotrice s'identifie à la tension à vide de la pile ($I = 0$), elle vaut $\boxed{E = 4{,}63\,\text{V}}$. Le coefficient directeur est égal à $-r$, on obtient sa valeur en effectuant une régression linéaire à la calculatrice : $\boxed{r = 1{,}63\,\Omega}$.

Application 2

1. On rassemble les deux résistances en dérivation ($R_{\text{eq1}} = R/2$). On rassemble ensuite R_{eq1} et R en série : $\boxed{R_{AB} = 3R/2}$.

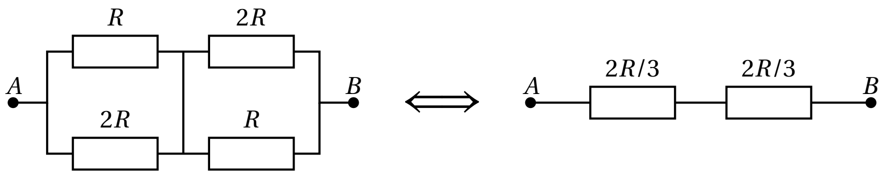
2. On rassemble les deux résistances en série (dans la branche de droite, $R_{\text{eq1}} = 2R$), puis les résistances R et R_{eq1} en dérivation ($R_{\text{eq2}} = 2R/3$) et enfin les résistances R_{eq2} et R en série : $\boxed{R_{AB} = 5R/3}$.

3. La méthode est semblable au cas précédent :

- deux résistances en série dans la branche la plus à droite : $R_{\text{eq1}} = 2R$;
- R et R_{eq1} en dérivation : $R_{\text{eq2}} = 2R/3$;
- R et R_{eq2} en série : $R_{\text{eq3}} = 5R/3$;
- R et R_{eq3} en dérivation : $R_{\text{eq4}} = 5R/8$;
- R et R_{eq4} en série : $\boxed{R_{AB} = 13R/8}$.

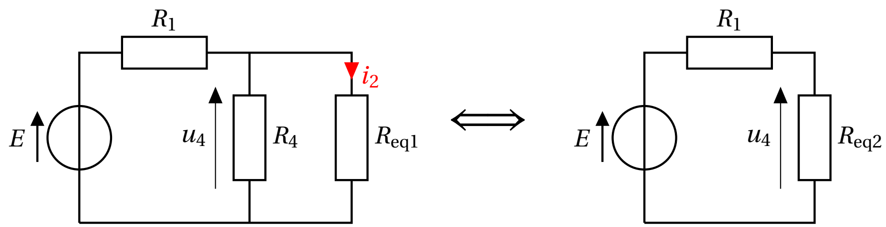
4. On rassemble les résistances en série dans chaque branche ($R_{\text{eq}} = 3R$ à chaque fois). On rassemble R_{eq} et R_{eq} en dérivation : $\boxed{R_{AB} = 3R/2}$.

5. On commence par rassembler les résistances en série, puis celles en dérivation. On termine avec deux résistances équivalentes identiques en série : $\boxed{R_{AB} = 4R/3}$.



Application 3

On note que R_2 et R_3 sont en série ($R_{\text{eq1}} = R_2 + R_3 = 50\,\Omega$) puis que R_4 et R_{eq1} sont en dérivation ($R_{\text{eq2}} = \frac{R_4(R_2+R_3)}{R_2+R_3+R_4} = 22\,\Omega$). On trace deux schémas équivalents.



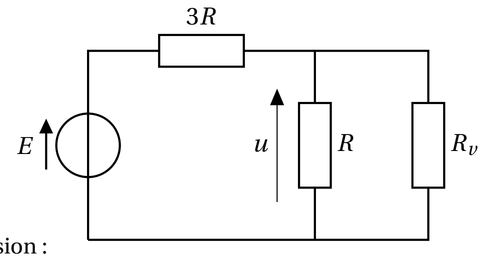
On calcule u_4 avec la loi du pont diviseur de tension : $\boxed{u_4 = \dfrac{R_{\text{eq2}}}{R_1 + R_{\text{eq2}}} E = 8{,}3\,\text{V}}$.

On calcule i_2 avec la loi d'Ohm : $\boxed{i_2 = \dfrac{u_4}{R_{\text{eq1}}} = 0{,}17\,\text{A}}$.

Application 4

1. Le voltmètre est idéal donc il se comporte comme un interrupteur ouvert et les résistances R et $3R$ sont en série. On applique la loi du pont diviseur de tension : $\boxed{u = E/4 = 5{,}0\,\text{V}}$.

2. On dessine le schéma équivalent du circuit en tenant compte de la résistance d'entrée du voltmètre, branchée en dérivation avec R. La présence du voltmètre revient à remplacer R par la résistance équivalente $R_{\text{eq}} = \dfrac{RR_v}{R+R_v}$.



On applique à nouveau la loi du pont diviseur de tension :

$$u = \frac{\frac{RR_v}{R+R_v}}{3R + \frac{RR_v}{R+R_v}} E = \frac{E}{1 + \frac{3(R+R_v)}{R_v}} = \frac{E}{4 + \frac{3R}{R_v}}$$

On conclut : $\boxed{R = \dfrac{R_v}{3}\left(\dfrac{E}{u} - 4\right) = 0{,}70\,\mathrm{M\Omega}}$.

3. On note $u_0 = E/4$ la valeur obtenue dans le cas du voltmètre idéal. On souhaite que la résistance R soit telle que $\dfrac{u_0 - u}{u_0} \leq 10^{-3}$ avec :

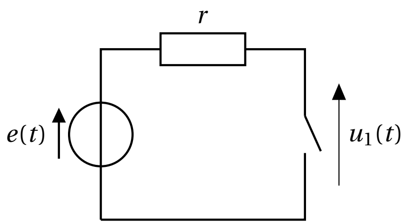
$$\frac{u_0 - u}{u_0} = 1 - \frac{4u}{E} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{3R}{4R_v}} = \frac{1}{1 + \frac{4R_v}{3R}}$$

On détermine la condition vérifiée par R :

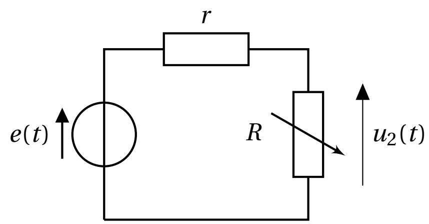
$$\frac{1}{1 + \frac{4R_v}{3R}} \leq 10^{-3} \iff \frac{4R_v}{3R} \geq 999 \iff \boxed{R \leq \frac{4R_v}{3 \times 999} = 13\,\mathrm{k\Omega}}$$

L'influence du voltmètre sur u est inférieure à $0{,}1\,\%$ tant que R ne dépasse pas $13\,\mathrm{k\Omega}$.

Application 5



Montage 1



Montage 2

1. On dessine le schéma équivalent du circuit pour le premier montage ($R = \infty$) puis le deuxième. L'oscilloscope est idéal donc il se comporte comme un interrupteur ouvert.
Dans le premier montage l'intensité est nulle donc la tension aux bornes de r aussi. On en déduit que $u_1(t) = e(t)$.

Dans le deuxième montage les résistances r et R sont en série, on applique la loi du pont diviseur de tension :

$$u_2(t) = \frac{R}{R+r} e(t)$$

La résistance variable est choisie de manière à observer $u_2(t) = e(t)/2$, donc :

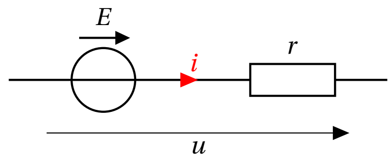
$$\frac{R}{R+r} = \frac{1}{2} \iff \boxed{R = r}$$

La méthode qui permet de mesurer la résistance de sortie du GBF est la suivante :

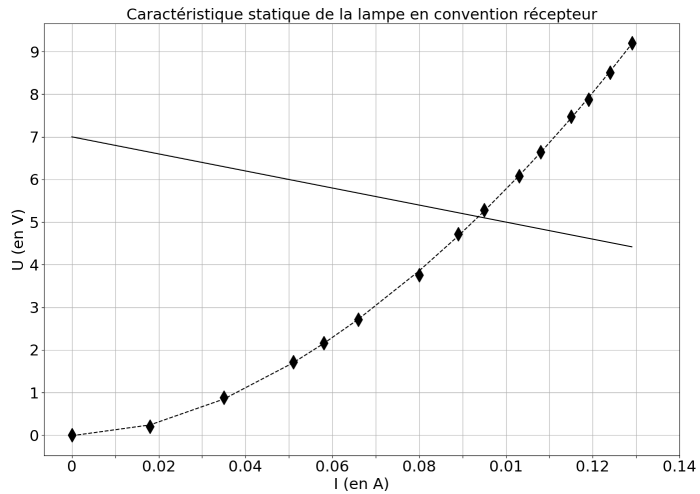
- On fixe $R = \infty$ (circuit ouvert) de manière à observer exactement la f.e.m. $e(t)$ à l'oscilloscope ;
- on diminue R jusqu'à observer la tension moitié $e(t)/2$. Une fois ce réglage effectué il ne reste plus qu'à lire la valeur de R puisqu'elle est exactement égale à r dans cette configuration.

Application 6

1. Le modèle de Thévenin de la pile est le suivant :



La caractéristique courant-tension a pour équation $\boxed{u = E - ri}$. On la trace sur le graphe fourni.



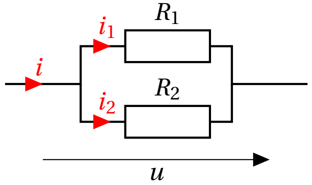
2. On lit les coordonnées du point de fonctionnement : $\boxed{(94\,\mathrm{mA}\,;\,5{,}1\,\mathrm{V})}$.

La puissance consommée par la lampe vaut $\boxed{\mathscr{P} = ui = 0{,}48\,\mathrm{W}}$.

TD5 : Circuits linéaires - corrigé

⋆ Exercice 1 : Puissance reçue

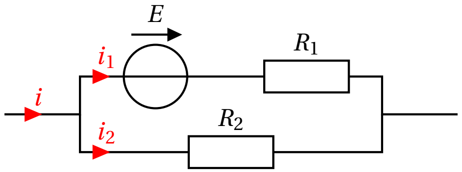
a)



D'après la loi d'Ohm (convention générateur!), $i_1 = -\frac{u}{R_1} = -1\,\mathrm{A}$ et $i_2 = -\frac{u}{R_2} = -2\,\mathrm{A}$. D'après la loi des nœuds : $\boxed{i = i_1 + i_2 = -3\,\mathrm{A}}$.

Les puissances reçues par R_1 et R_2 valent respectivement $\boxed{\mathscr{P}_1 = R_1 i_1^2 = 10\,\mathrm{W}}$ et $\boxed{\mathscr{P}_2 = R_2 i_2^2 = 20\,\mathrm{W}}$.

b)



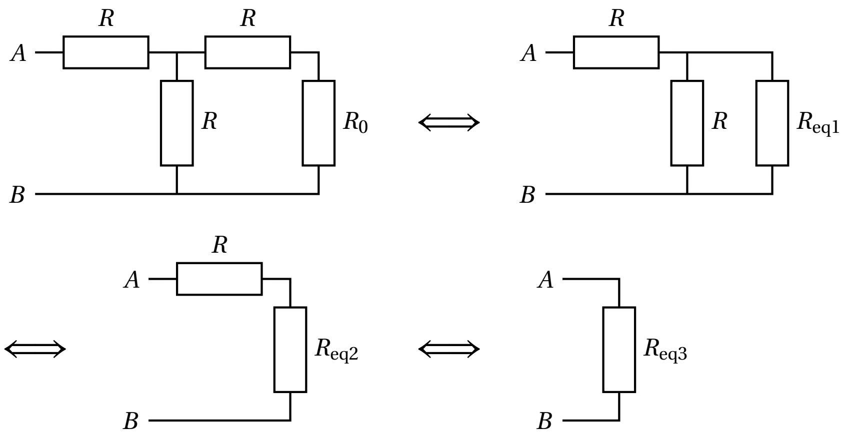
D'après la loi des mailles : $E - R_1 i_1 + R_2 i_2 = 0 \iff i_1 = \frac{E + R_2 i_2}{R_1} = 1\,\mathrm{A}$. D'après la loi des nœuds, $\boxed{i = i_1 + i_2 = 1{,}2\,\mathrm{A}}$.

Les puissances reçues par R_1 et R_2 valent respectivement $\boxed{\mathscr{P}_1 = R_1 i_1^2 = 2\,\mathrm{W}}$ et $\boxed{\mathscr{P}_2 = R_2 i_2^2 = 0{,}2\,\mathrm{W}}$.

La puissance reçue par la source idéale de tension vaut $\boxed{\mathscr{P}_E = -E i_1 = -1\,\mathrm{W}}$.

⋆ Exercice 2 : Résistances équivalentes

On calcule plusieurs résistances équivalentes successives.



On associe d'abord R et R_0 en série : $R_{\mathrm{eq1}} = R + R_0$.

On associe ensuite R et R_{eq1} en dérivation : $R_{\mathrm{eq2}} = \frac{R R_{\mathrm{eq1}}}{R + R_{\mathrm{eq1}}} = \frac{R(R+R_0)}{2R+R_0}$.

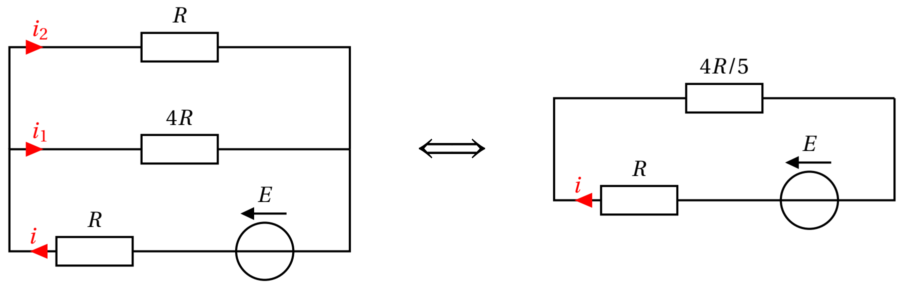
On associe enfin R et R_{eq2} en série : $R_{\mathrm{eq3}} = R + R_{\mathrm{eq2}} = \frac{R(3R+2R_0)}{2R+R_0}$.

La résistance équivalente entre A et B est égale à R_0 à condition que :

$$R_0 = \frac{R(3R+2R_0)}{2R+R_0} \iff 2RR_0 + R_0^2 = 3R^2 + 2RR_0 \iff R_0^2 = 3R^2 \iff \boxed{R_0 = \sqrt{3}R}$$

⋆ Exercice 3 : Circuit résistif

1. On rassemble les résistances R et $3R$ en série ($R_{\mathrm{eq1}} = 4R$) puis R_{eq1} et R en dérivation ($R_{\mathrm{eq2}} = 4R/5$). On représente ci-dessous les deux schémas équivalents successifs. On applique la loi de Pouillet dans le dernier circuit, constitué d'une seule maille : $\boxed{i = \frac{E}{R + \frac{4R}{5}} = \frac{5E}{9R} = 0{,}10\,\mathrm{A}}$.



Connaissant i on obtient i_1 et i_2 grâce à la loi du pont diviseur de courant :

$$\boxed{i_1 = \frac{R}{R+4R}\, i = \frac{i}{5} = 20\,\mathrm{mA}} \quad \text{et} \quad \boxed{i_2 = \frac{4R}{R+4R} = \frac{4i}{5} = 80\,\mathrm{mA}}$$

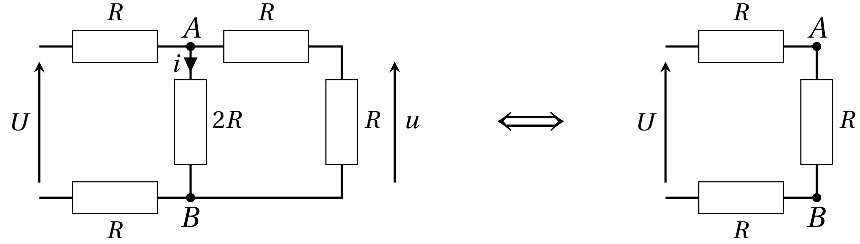
2. La puissance fournie par la source de tension vaut $\boxed{\mathscr{P}_f = Ei = 0{,}90\,\mathrm{W}}$.

3. On commence par le résistor en série avec la source : $\boxed{\mathscr{P}_1 = Ri^2 = 0{,}50\,\mathrm{W}}$. On continue avec les deux résistors de la branche centrale : $\boxed{\mathscr{P}_2 = Ri_1^2 = 0{,}02\,\mathrm{W}}$ et $\boxed{\mathscr{P}_3 = 3Ri_1^2 = 0{,}06\,\mathrm{W}}$. On termine avec le résistor de la branche du haut : $\boxed{\mathscr{P}_4 = Ri_2^2 = 0{,}32\,\mathrm{W}}$.

Remarque : On vérifie, comme c'était attendu, que $\mathscr{P}_f = \mathscr{P}_1 + \mathscr{P}_2 + \mathscr{P}_3 + \mathscr{P}_4$.

★★ Exercice 4 : Associations de résistances

a) Dans un premier temps, on note $R = 5\,\Omega$ et $U = 10\,V$ la tension aux bornes du dipôle. On simplifie le schéma du circuit en rassemblant les deux résistances de $5\,\Omega$ en série ($R_{\text{eq},1} = 2R = 10\,\Omega$), puis en rassemblant les deux résistances de $10\,\Omega$ en dérivation ($R_{\text{eq},2} = R = 5\,\Omega$).

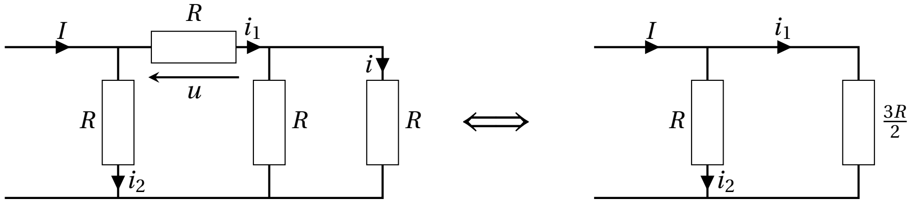


On applique la loi du pont diviseur de tension : $V = \frac{U}{3} = 3,3\,V$. Par définition, $V = u_{AB}$. D'après la loi d'Ohm (voir schéma de gauche) :

$$V = 2Ri \iff \boxed{i = \frac{V}{2R} = 0,33\,A}$$

On applique encore la loi du pont diviseur de tension pour déterminer u : $\boxed{u = \frac{V}{2} = 1,7\,V}$.

b) Désormais, on pose $R = 10\,\Omega$ et $I = 5\,A$ l'intensité du courant qui alimente le dipôle. On simplifie le schéma en rassemblant les deux résistances à droite du schéma, en dérivation ($R_{\text{eq},1} = \frac{R}{2} = 5\,\Omega$), puis en rassemblant $R_{\text{eq},1}$ en série avec la résistance aux bornes de laquelle la tension vaut u ($R_{\text{eq},2} = \frac{3R}{2} = 15\,\Omega$).

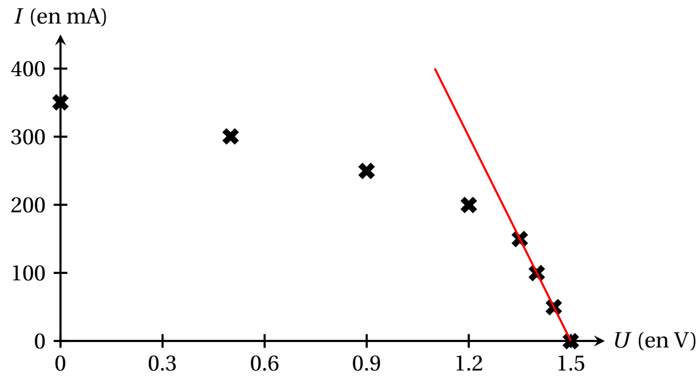


On applique la loi du pont diviseur de courant : $i_1 = \frac{\frac{2}{3R}}{\frac{1}{R}+\frac{2}{3R}} I = \frac{2I}{5} = 2\,A$. D'après la loi d'Ohm (voir schéma de gauche) : $\boxed{u = Ri_1 = 20\,V}$.

On applique encore la loi du pont diviseur de courant pour déterminer i : $\boxed{i = \frac{i_1}{2} = 1\,A}$.

★★ Exercice 5 : Caractéristique d'une pile

1.



2. On a représenté ci-dessus le modèle linéaire correspondant aux faibles intensités. La fem correspond à la tension à vide ($I = 0$), donc $\boxed{E = 1,5\,V}$. La pente du modèle est égale à $-\frac{1}{r}$. À partir des deux premières valeurs du tableau, on estime que $\boxed{r = 1\,\Omega}$.

★★ Exercice 6 : Circuit linéaire

1. La tension U est la même aux bornes des trois branches. On peut donc écrire que :

$$\begin{cases} U = E_1 - R_1 I_1 \iff I_1 = \frac{E_1 - U}{R_1} = G_1(E_1 - U) \\ U = RI \iff I = GU \\ U = -E_2 - R_2 I_2 \iff I_2 = \frac{-E_1 - U}{R_2} = -G_2(E_2 + U) \end{cases}$$

D'après la loi des nœuds :

$$I = I_1 + I_2 \iff GU = G_1 E_1 - G_2 E_2 - G_1 U - G_2 U \iff \boxed{U = \frac{G_1 E_1 - G_2 E_2}{G + G_1 + G_2}}$$

2. La tension U vaut :

$$\boxed{U = \frac{\frac{E_1}{2R} - \frac{E_2}{R}}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R}} = \frac{E_1 - 2E_2}{5} = -1,0\,V}$$

D'après le calcul effectué à la question 1 :

$$\boxed{I_1 = \frac{E_1 - U}{2R} = \frac{2E_1 + E_2}{5R} = 0,80\,A}$$

★★ Exercice 7 : Pont de Wheatstone

1. On note $u_3 = u_{AD}$ la tension aux bornes de R_3 et $u_1 = u_{AC}$ la tension aux bornes de R_1. D'après la loi du pont diviseur de tension :

$$u_3 = \frac{R_3}{R_3+R_4}E \quad \text{et} \quad u_1 = \frac{R_1}{R_1+R_2}E$$

On exploite l'additivité des tensions :

$$u = u_{CD} = u_{CA} + u_{AD} = u_3 - u_4 = \left(\frac{R_3}{R_3+R_4} - \frac{R_1}{R_1+R_2}\right)E \iff \boxed{u = \frac{R_2R_3 - R_1R_4}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)}E}$$

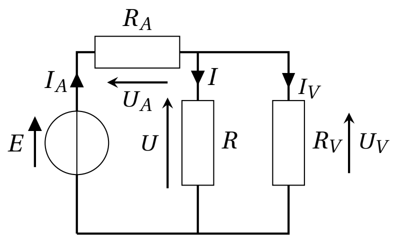
2. Le pont est équilibré lorsque $u = 0 \iff R_1R_4 = R_2R_3$. On en déduit la valeur de R_1 :

$$\boxed{R_1 = \frac{R_2R_3}{R_4} = 36{,}5\,\Omega}$$

★★ Exercice 8 : Montage amont/aval

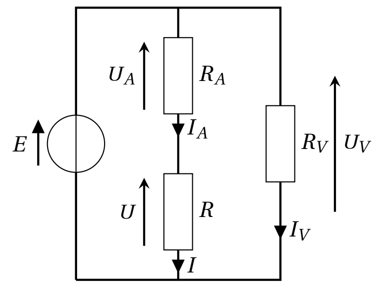
1. Dans le montage aval, le voltmètre est branché en dérivation avec R; il permet de mesurer la tension à ses bornes ($U_V = U$). En revanche, l'ampèremètre n'est pas branché en série avec R. Bien que le courant qui circule dans le voltmètre est généralement faible car sa résistance d'entrée est élevée, **on fait une erreur systématique sur la valeur de l'intensité lorsque l'on réalise le montage aval** ($I_A \neq I$).
Dans le montage amont, l'ampèremètre est branché en série avec R; il permet de mesurer l'intensité du courant qui la traverse ($I_A = I$). En revanche, le voltmètre n'est pas branché en dérivation avec R. Bien que la tension aux bornes de l'ampèremètre est généralement faible car sa résistance d'entrée est faible, **on fait une erreur systématique sur la valeur de la tension lorsque l'on réalise le montage amont** ($U_V \neq U$).
En conclusion, **aucun des deux montages ne permet de mesurer simultanément des valeurs correctes de tension et d'intensité**.

2. On commence par reproduire le schéma du montage, en remplaçant l'ampèremètre et le voltmètre par leur résistance d'entrée associée.



D'après la loi des nœuds : $I_A - I = I_V$. D'après la loi d'Ohm, $U = RI = R_VI_V \iff \boxed{\frac{I_A - I}{I} = \frac{I_V}{I} = \frac{R}{R_V}}$.

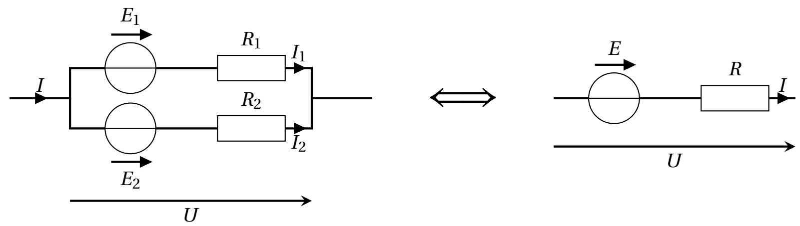
3. On reproduit à nouveau le schéma du montage en remplaçant l'ampèremètre et le voltmètre par leur résistance d'entrée associée.



D'après la loi des mailles : $U_V - U = U_A$. D'après la loi d'Ohm, $I = \frac{U_A}{R_A} = \frac{U}{R} \iff \boxed{\frac{U_V - U}{U} = \frac{U_A}{U} = \frac{R_A}{R}}$.

4. Le montage le plus approprié est celui pour lequel l'erreur relative est la plus faible. Le montage aval est adapté au cas de faibles résistances ($R \ll R_V$), le montage amont au cas de fortes résistances ($R \gg R_A$). Le cas limite est celui pour lequel les erreurs relatives sont identiques. Cela arrive lorsque $\frac{R}{R_V} = \frac{R_A}{R} \iff R = \sqrt{R_AR_V}$. En prenant comme valeurs numériques $R_V = 10\,\text{M}\Omega$ et $R_A = 0{,}1\,\Omega$, on obtient une résistance limite $R = 1\,\text{k}\Omega$.
En conclusion, **si $R < 1\,\text{k}\Omega$ alors on utilisera le montage aval. Si $R > 1\,\text{k}\Omega$, on utilisera la montage amont**.

★★ Exercice 9 : Association de générateurs linéaires



L'objectif de cet exercice est de démontrer que la relation $U = f(I)$ pour l'association en dérivation de deux générateurs de Thévenin peut s'écrire sous la forme $U = E - RI$, comme ce serait le cas pour un générateur de Thévenin unique, avec E la fem équivalente et R la résistance équivalente, que l'on va chercher à exprimer en fonction de E_1,E_2, R_1 et R_2.

Dans un premier temps, on peut écrire :

$$U = E_1 - R_1I_1 \iff I_1 = \frac{E_1 - U}{R_1} \quad \text{et} \quad U = E_2 - R_2I_2 \iff I_2 = \frac{E_2 - U}{R_2}$$

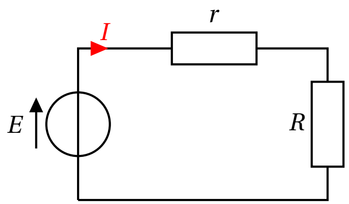
D'après la loi des nœuds : $I = I_1 + I_2 = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} - U\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} - \frac{R_1+R_2}{R_1R_2}U$.

En isolant U, on obtient : $U = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}I + \frac{R_2E_1+R_1E_2}{R_1+R_2}$. Cette relation est bien analogue à celle d'un générateur de Thévenin unique, avec par identification :

$$\boxed{E = \frac{R_2E_1 + R_1E_2}{R_1+R_2}} \quad \text{et} \quad \boxed{R = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}}$$

⋆⋆ Exercice 10 : Adaptation d'impédance

On représente le schéma du circuit.



D'après la loi de Pouillet : $I = \frac{E}{r+R}$. La puissance consommée par R vaut donc $\mathscr{P} = RI^2 = \frac{RE^2}{(r+R)^2}$.

On étudie les variations de la fonction $\mathscr{P}(R)$, en commençant par calculer sa dérivée :

$$\mathscr{P}'(R) = \frac{r^2 - R^2}{(r+R)^4} E^2$$

$\mathscr{P}'$ s'annule pour $\boxed{R_0 = r}$. Pour cette valeur de résistance, la puissance consommée est maximale et vaut $\mathscr{P}_{\max} = \frac{E^2}{4r}$.