Chapitre 5

PRIMITIVES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

I Calcul de primitives

1 Définition

Définition 1 *Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur I. On appelle* **primitive de f sur I** *toute fonction $F : I \to \mathbb{C}$ dérivable sur I telle que $F' = f$.*

Proposition 1 *Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.*

Cela signifie que si F_1 et F_2 sont deux primitives de f, alors il existe une constante $c \in \mathbb{C}$ telle que $F_1 = F_2 + c$.

Démonstration :
Soient F_1 et F_2 deux primitives de f sur I. Alors $F_1' = F_2' = f$, donc $(F_1 - F_2)' = 0$, et donc $F_1 - F_2$ est constante sur I. □

2 Théorème fondamental

Théorème 2 *Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur I. Soit $a \in I$. La fonction $F : I \to \mathbb{C}$ définie par :*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Démonstration : Admis pour l'instant. □

Corollaire 3 *Toute fonction continue sur un intervalle y admet des primitives.*

Remarques :
1) D'après la proposition 1, il n'y a pas unicité. On ne dira donc pas *la* primitive de f, mais *une* primitive de f.
2) On pourra noter $\int^x f(t)\,dt$ ou $\int f(x)dx$ (sans bornes) une primitive générique de f.

Corollaire 4 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur $[a, b]$. Soit F une primitive de f sur $[a, b]$. Alors :*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

que l'on note $[F(x)]_a^b$.

Démonstration :
D'après le théorème 2, la fonction G définie par $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f sur $[a, b]$. La fonction F aussi. Il existe donc une constante $c \in \mathbb{C}$ telle que $F = G + c$. Or $G(a) = 0$, donc $F(a) = c$. On a ainsi $\int_a^b f(t)dt = G(b) = F(b) - c = F(b) - F(a)$. □

Exercice 1 Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_a^b 1\,dx \ ; \ \int_1^2 x\,dx \ ; \ \int_0^1 e^t\,dt \ ; \ \int_1^e \frac{dx}{x} \ ; \ \int_0^{\pi/4} \cos x\,dx \ ; \ \int_0^{\pi/4} \sin x\,dx \ ; \ \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

3 Intégration par parties

Définition 2 *Une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est* **de classe** $\mathcal{C}^1$ *sur I si elle est dérivable sur I et que sa dérivée est continue sur I.*

Cette notion sera revue en détail plus tard.

Proposition 5 *Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Soient $a, b \in I$. Alors :*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

Démonstration :

Les intégrales sont bien définies car u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ donc u' et v' sont continues sur I. La formule de dérivation d'un produit $(uv)' = u'v + uv'$ permet d'écrire :

$$[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b (uv)'(x)\,dx = \int_a^b u'(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$$

et le résultat s'ensuit. □

Pour les intégrales indéfinies on a :

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx.$$

L'intégration par parties sert à calculer des intégrales ou des primitives d'un produit.

Exemples :

1) Soit à calculer $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$. On pose $u(x) = x$, donc on a $u'(x) = 1$, et pour avoir $v'(x) = \cos x$ on pose $v(x) = \sin x$. Alors u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx &= [x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx \\ &= \frac{\pi}{2} - [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2} - 1\end{aligned}$$

2) Déterminons une primitive de la fonction ln sur $]0, +\infty[$. On va intégrer par parties en écrivant que $\ln x = 1 \times \ln x$. On pose $u(x) = \ln x$, donc on a $u'(x) = \dfrac{1}{x}$, et pour avoir $v'(x) = 1$ on pose $v(x) = x$. Alors u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, et :

$$\begin{aligned}\int \ln x\,dx &= x\ln x - \int x \times \frac{1}{x}\,dx \\ &= x\ln x - \int 1\,dx \\ &= x\ln x - x\end{aligned}$$

4 Changement de variable

Proposition 6 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I. Soit $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$ telle que $\varphi([\alpha, \beta]) \subset I$. Alors :*

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx.$$

Démonstration :

Soit F une primitive de f sur I. Alors $F \circ \varphi$ est dérivable sur $[\alpha, \beta]$ et $(F \circ \varphi)' = (F' \circ \varphi) \times \varphi' = (f \circ \varphi) \times \varphi'$, donc :

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)dx &= \int_\alpha^\beta (F \circ \varphi)'(x)dx \\ &= [(F \circ \varphi)(x)]_\alpha^\beta \\ &= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \\ &= [F(t)]_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \\ &= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt. \;\square\end{aligned}$$

On peut appliquer ce résultat de deux manières différentes :

1) Soit à calculer $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$:

a) Poser le changement de variable $t = \varphi(x)$.

b) Exprimer dt en fonction de dx en écrivant comme en physique : $t = \varphi(x)$ donc $\frac{dt}{dx} = \varphi'(x)$ et $dt = \varphi'(x)\,dx$.

c) Changer les bornes : trouver α et β tels que $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ et $\varphi([\alpha, \beta]) = [a, b]$.

d) La proposition donne $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$.

Exemple : Soit à calculer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt$. On effectue le changement de variable $t = \sin x$ avec $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On a alors $dt = \cos x\,dx$, et :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 x}\cos x\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx \\
&= \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

2) Si on reconnait une intégrale de la forme $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$:

a) Poser le changement de variable $t = \varphi(x)$.

b) Exprimer dt en fonction de dx : $t = \varphi(x)$ donc $dt = \varphi'(x)\,dx$.

c) Changer les bornes : $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$.

d) La proposition donne $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$.

Exemple : Soit à calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,dx$. On effectue le changement de variable $y = e^x$. On a alors $dy = e^x\,dx$, et on voit que l'on peut faire apparaître dy dans l'intégrale en multipliant numérateur et dénominateur par e^x :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,dx &= \int_0^1 \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1} \\
&= \int_1^e \frac{dy}{y^2+1} \\
&= [\operatorname{Arctan} y]_1^e \\
&= \operatorname{Arctan} e - \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Noter qu'on pouvait aussi exprimer x en fonction de y ($x = \ln y$) pour calculer dx.

On peut également utiliser le changement de variable pour calculer des primitives, mais il faut alors que le changement de variable soit bijectif car à la fin du calcul il faut revenir à la première variable.

Exemple : Déterminons une primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$ sur $I =]-1, +\infty[$. On va poser $y = \sqrt{x+1}$. Alors :

$$y = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow y^2 = x+1 \Leftrightarrow x = y^2 - 1,$$

donc le changement de variable est bien bijectif. On a alors $dx = 2y\,dy$, donc :

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx &= \int \frac{y^2-1}{y} 2y\,dy \\
&= 2\int (y^2-1)\,dy \\
&= \frac{2y^3}{3} - 2y \\
&= \frac{2\sqrt{x+1}^3}{3} - 2\sqrt{x+1}.
\end{aligned}
$$

On aurait pu également calculer cette primitive en écrivant $\dfrac{x}{\sqrt{x+1}} = \dfrac{x+1}{\sqrt{x+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{x+1} - \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ ou en intégrant par parties.

5 Exemples de calculs de primitives

• Primitives usuelles

Les primitives usuelles se déduisent des dérivées usuelles.

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$	Intervalle de validité
x^α $(\alpha \neq -1)$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$]0,+\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\|x\|$	$]0,+\infty[$ ou $]-\infty,0[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$-\ln\|\cos x\|$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$	Intervalle de validité
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x$	$]k\pi, (k+1)\pi[$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{Arcsin} x$	$]-1,1[$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{Arctan} x$	$\mathbb{R}$

Remarques :

1) Souvent, pour déterminer une primitive d'une fonction f, on essaiera de trouver une fonction dont la dérivée est égale à f à une constante multiplicative près : il suffira alors de diviser cette fonction par la constante.

Soit par exemple $f(x) = (3x-1)^4$. On sait que la dérivée de $x \mapsto (3x-1)^5$ est $x \mapsto 5 \times (3x-1)^4 \times 3 = 15 \times (3x-1)^4$, donc une primitive de f est $x \mapsto \dfrac{(3x-1)^5}{15}$.

2) Il faut savoir reconnaître les dérivées de fonctions composées : $\dfrac{u'}{u} = (\ln u)'$, $uu' = \left(\dfrac{u^2}{2}\right)'$, $u'e^u = (e^u)'$, etc.

Exercice 2 Calculer les intégrales suivantes :

$$
\int_0^1 \frac{dx}{(2x+1)^3} \ ; \ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x+\tfrac{\pi}{4})\,dx \ ; \ \int_0^1 xe^{x^2}\,dx \ ; \ \int_0^1 \frac{\operatorname{Arctan} x}{1+x^2}\,dx \ ; \ \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.
$$

• Primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+bx+c}$

Soit le polynôme $P(x) = x^2+bx+c$, où $b, c \in \mathbb{R}$, et soit Δ son discriminant.

1) Si $\Delta > 0$, alors P a deux racines réelles distinctes x_1 et x_2, et $P(x) = (x-x_1)(x-x_2)$. On cherche alors deux réels α et β tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$
\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{\alpha}{x-x_1} + \frac{\beta}{x-x_2},
$$

ce qui est toujours possible (on l'admet), et il est alors facile d'obtenir une primitive.

2) Si $\Delta = 0$, alors P a une racine réelle double x_0, et $P(x) = (x - x_0)^2$. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{(x-x_0)^2}$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{x - x_0}$.

3) Si $\Delta < 0$, l'idée est d'écrire $P(x)$ sous forme canonique $(x-p)^2 + q^2$, de mettre q^2 en facteur, puis de se ramener à une primitive de $\dfrac{1}{1+y^2}$ à l'aide d'un changement de variable.

Exercice 3 Calculer :

$$\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} \;;\; \frac{dx}{x^2 + 4x + 4} \;;\; \frac{dx}{x^2 + x + 1}.$$

• PRIMITIVES DE $x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$ ET DE $x \mapsto e^{ax}\sin(bx)$

Il y a deux méthodes possibles :

1) On peut chercher une primitive de $x \mapsto e^{(a+ib)x}$ et prendre la partie réelle ou la partie imaginaire.

2) On peut intégrer deux fois par parties.

Exercice 4 Calculer $\displaystyle\int e^{3x}\cos(2x)dx$ et $\displaystyle\int e^{3x}\sin(2x)dx$.

II Équations différentielles linéaires du premier ordre

1 Définition

Définition 3 *Une* **équation différentielle linéaire du premier ordre** *est une équation différentielle de la forme*

$$(E) \;:\; a(x)y' + b(x)y = c(x),$$

où a, b et c sont des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Résoudre *ou* **intégrer** *(E) sur I, c'est déterminer toutes les fonctions $y : I \to \mathbb{C}$ dérivables sur I et telles que $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)$ pour tout $x \in I$. Une telle fonction est appelée* **solution** *de (E) sur I.*

L'équation (E) est dite **homogène** *ou* **sans second membre** *si c est la fonction nulle.*

Remarques :

1) Le terme *linéaire* utilisé pour désigner ces équations vient du fait que si y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation homogène $(E_0) \;:\; a(x)y' + b(x)y = 0$, alors les combinaisons linéaires $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ (où $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$) le sont aussi. Ce sera revu plus en détail ultérieurement.

2) Si la fonction a ne s'annule pas sur I, alors l'équation (E) est équivalente à l'équation $y' + \dfrac{b(x)}{a(x)}y = \dfrac{c(x)}{a(x)}$. Dans la suite de ce paragraphe on étudiera donc les équations de la forme :

$$y' + a(x)y = b(x),$$

où a et b sont des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

2 Résolution de l'équation homogène $(E_0) \;:\; y' + a(x)y = 0$

Théorème 7 *Les solutions sur I de l'équation différentielle $y' + a(x)y = 0$, où $a : I \to \mathbb{C}$ est une fonction continue sur I, sont les fonctions $y : I \to \mathbb{C}$ définies par :*

$$y(x) = \lambda e^{-A(x)},$$

où A est une primitive de a sur I et $\lambda \in \mathbb{C}$.

Démonstration :

– Première étape : on suppose que a est à valeurs réelles, et on cherche les solutions de (E_0) à valeurs strictement positives.

Soit donc $y : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I à valeurs strictement positives. Alors :

$$\begin{aligned} y' + ay = 0 &\Leftrightarrow y' = -ay \\ &\Leftrightarrow \frac{y'}{y} = -a \\ &\Leftrightarrow (\ln y)' = -a \end{aligned}$$

Or la fonction a est continue sur I, donc elle y admet des primitives. Soit A une telle primitive. Alors :

$$\begin{aligned} (\ln y)' = -a &\Leftrightarrow \exists\, c \in \mathbb{R},\ \ln y = -A + c \\ &\Leftrightarrow \exists\, c \in \mathbb{R},\ y = e^{-A+c} \\ &\Leftrightarrow \exists\, c \in \mathbb{R},\ y = e^{c}e^{-A} \\ &\Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R}_+^*,\ y = \lambda e^{-A} \end{aligned}$$

Conclusion : les solutions de (E_0) à valeurs strictement positives sont les fonctions $y : I \to \mathbb{R}$ définies par $y(x) = \lambda e^{-A(x)}$, où A est une primitive de a sur I et λ est un réel strictement positif.

− Deuxième étape : on revient au cas général $a : I \to \mathbb{C}$ et on montre que les fonctions définies par $y(x) = \lambda e^{-A(x)}$, avec cette fois $\lambda \in \mathbb{C}$, sont solutions de (E_0).

C'est immédiat : pour tout $x \in I$ on a $y'(x) = \lambda(-A'(x))e^{-A(x)} = -\lambda a(x)e^{-A(x)} = -a(x)y(x)$, donc $y'(x) + a(x)y(x) = 0$, et la fonction y est bien solution de (E_0).

− Troisième étape : on cherche s'il y a d'autres solutions par la **méthode de variation de la constante**.

Soit $y : I \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable sur I. On pose $\psi(x) = e^{-A(x)}$, et on pose $y = z\psi$ (i.e. $z = \dfrac{y}{\psi}$). ψ ne s'annule pas sur I, donc z est définie et dérivable sur I, et $y' = z'\psi + z\psi'$. Alors :

$$\begin{aligned} y' + ay = 0 &\Leftrightarrow z'\psi + z\psi' + az\psi = 0 \\ &\Leftrightarrow z'\psi + z\underbrace{(\psi' + a\psi)}_{=0} = 0 \\ &\Leftrightarrow z'\psi = 0 \\ &\Leftrightarrow z' = 0 \\ &\Leftrightarrow z \text{ est constante} \\ &\Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{C},\ z = \lambda \\ &\Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{C},\ y = \lambda\psi. \end{aligned}$$

Conclusion : les seules solutions de (E_0) sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$, avec $\lambda \in \mathbb{C}$. □

Remarques :

1) Cette formule est à savoir. La première étape de la démonstration permet de la retrouver.

2) Si a est à valeurs réelles et que l'on cherche uniquement les solutions à valeurs réelles, il suffit de prendre $\lambda \in \mathbb{R}$.

3) Les solutions sont les fonctions proportionnelles à $\psi : x \mapsto e^{-A(x)}$. On dit que l'ensemble des solutions est la *droite vectorielle* engendrée par ψ (cf chapitre sur les espaces vectoriels).

Si la fonction a est constante, les solutions de l'équation $y' + ay = 0$ sont particulièrement simples :

Corollaire 8 *Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ (où $a \in \mathbb{C}$) sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = \lambda e^{-ax}$, où $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Exercice 5 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(x^2 + 1)y' + y = 0$. On donnera les solutions à valeurs réelles.

3 Résolution de l'équation avec second membre $(E)\ :\ y' + a(x)y = b(x)$

• Etude théorique

Théorème 9 *Les solutions sur I de l'équation différentielle $(E)\ :\ y' + a(x)y = b(x)$, où $a, b : I \to \mathbb{C}$ sont des fonctions continues sur I, sont les fonctions $y : I \to \mathbb{C}$ définies par :*

$$y(x) = F(x)\psi(x) + \lambda\psi(x),$$

où $\psi(x) = e^{-A(x)}$ avec A une primitive de a sur I, F est une primitive de $\dfrac{b}{\psi}$ sur I, et $\lambda \in \mathbb{C}$.

Démonstration :

On pose donc $\psi = e^{-A}$ où A est une primitive de a sur I. On va à nouveau utiliser la méthode de variation de la constante.

Soit $y : I \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable sur I. Posons $y = z\psi$ (i.e. $z = \dfrac{y}{\psi}$). ψ ne s'annule pas sur I, donc z est définie et dérivable sur I, et $y' = z'\psi + z\psi'$. Alors :

$$\begin{aligned} y' + ay = b \quad &\Leftrightarrow \quad z'\psi + z\psi' + az\psi = b \\ &\Leftrightarrow \quad z'\psi + z(\underbrace{\psi' + a\psi}_{=0}) = b \\ &\Leftrightarrow \quad z'\psi = b \\ &\Leftrightarrow \quad z' = \frac{b}{\psi} \end{aligned}$$

La fonction $\dfrac{b}{\psi}$ est continue sur I, donc elle y admet des primitives. Soit F l'une d'elles. Alors :

$$\begin{aligned} z' = \frac{b}{\psi} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{C},\, z = F + \lambda \\ &\Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{C},\, y = F\psi + \lambda\psi. \square \end{aligned}$$

Remarques :

1) Si a et b sont à valeurs réelles et que l'on ne cherche que les solutions à valeurs réelles, il suffit de prendre $\lambda \in \mathbb{R}$.

2) Cette formule n'est *pas à savoir*. C'est un résultat théorique qui nous dit qu'il y a toujours des solutions et quelle forme elles ont. On va voir maintenant comment résoudre en pratique une équation de ce type.

Théorème 10 *Si on connaît une solution particulière y_1 de (E), on obtient toutes les solutions de (E) en ajoutant à y_1 les solutions de l'équation sans second membre associée à (E).*

Démonstration :
y_1 est une solution de (E), donc $y_1' + ay_1 = b$. Soit y une fonction dérivable sur I. Alors :

$$\begin{aligned} y' + ay = b \quad &\Leftrightarrow \quad y' + ay = y_1' + ay_1 \\ &\Leftrightarrow \quad (y - y_1)' + a(y - y_1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad y - y_1 \text{ est solution de } (E_0) \\ &\Leftrightarrow \quad \exists\, y_0 \text{ solution de } (E_0),\, y = y_1 + y_0. \square \end{aligned}$$

On retiendra :

Solution générale de (E) = solution particulière de (E) + solution générale de (E_0)

• Méthode pratique de résolution de (E) : $y' + a(x)y = b(x)$

1) On résout l'équation sans second membre (E_0) : $y' + a(x)y = 0$ (cf théorème 8).

2) On cherche une solution particulière de (E).

– On regarde s'il y en a une évidente (solution constante par exemple), ou si on est dans un des cas particuliers ci-dessous (pages 8 et 9).

– Sinon on utilise la méthode de variation de la constante : on choisit une solution ψ de (E_0) qui ne s'annule pas, et on cherche une solution de (E) sous la forme $y = z\psi$ (comme dans la démonstration du théorème 9).

3) Le théorème 10 permet de conclure : on obtient la solution générale de (E) en additionnant la solution trouvée en 2) et la solution générale de (E_0) trouvée en 1).

• Exemples

Dans les exemples suivants, on cherche les solutions à valeurs réelles.

Exemple 1 : Résoudre (E) : $y' + xy = x$.

1) Résolution de l'équation homogène (E_0) : $y' + xy = 0$

On a $\displaystyle\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$ donc les solutions de (E_0) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = \lambda e^{-\frac{x^2}{2}}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

2) Recherche d'une solution particulière de (E)

On remarque que la fonction constante $x \mapsto 1$ est solution de (E).

3) Conclusion

Les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$y(x) = 1 + \lambda e^{-\frac{x^2}{2}},$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemple 2 : Résoudre (E) : $(1+x^2)y' + 2xy = x^2$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $1+x^2 \neq 0$, donc on peut diviser par $1+x^2$. L'équation (E) est donc équivalente à l'équation

$$y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{x^2}{1+x^2},$$

qui est de la forme $y' + a(x)y = b(x)$.

1) Résolution de l'équation homogène (E_0) : $y' + \dfrac{2x}{1+x^2}y = 0$

On a $\displaystyle\int \frac{2x}{1+x^2}dx = \ln(1+x^2)$ (on reconnaît une forme $\dfrac{u'}{u}$), et $e^{-\ln(1+x^2)} = \dfrac{1}{e^{\ln(1+x^2)}} = \dfrac{1}{1+x^2}$, donc les solutions de l'équation sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = \dfrac{\lambda}{1+x^2}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

2) Recherche d'une solution particulière de (E)

Il n'y a pas ici de solution particulière évidente. Pour en trouver une on utilise la méthode de variation de la constante.

Posons $\psi(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ (solution de (E_0) qui ne s'annule pas). Soit y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Posons $y = z\psi$. Alors $y' = z'\psi + z\psi'$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
y'(x) + \frac{2x}{1+x^2}y(x) = \frac{x^2}{1+x^2} \quad &\Leftrightarrow \quad z'(x)\psi(x) + z(x)\psi'(x) + \frac{2x}{1+x^2}z(x)\psi(x) = \frac{x^2}{1+x^2} \\
&\Leftrightarrow \quad z'(x)\psi(x) + z(x)\underbrace{\left(\psi'(x) + \frac{2x}{1+x^2}\psi(x)\right)}_{=0\ (\psi \text{ sol. de } (E_0))} = \frac{x^2}{1+x^2} \\
&\Leftrightarrow \quad z'(x)\psi(x) = \frac{x^2}{1+x^2} \\
&\Leftrightarrow \quad z'(x)\frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} \\
&\Leftrightarrow \quad z'(x) = x^2.
\end{aligned}$$

On peut prendre $z(x) = \dfrac{x^3}{3}$. Comme on a posé $y = z\psi$, on en déduit que la fonction y définie par $y(x) = \dfrac{x^3}{3(1+x^2)}$ est une solution particulière de (E).

3) Conclusion

Les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$y(x) = \frac{x^3}{3(1+x^2)} + \frac{\lambda}{1+x^2},$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Remarques :

1) Si on a une équation de la forme $a(x)y' + b(x)y = c(x)$, et que l'on veut diviser par $a(x)$, il faut vérifier que l'on travaille sur un intervalle où a ne s'annule pas. D'autre part, on n'oubliera pas de diviser également le second membre par $a(x)$.

2) On simplifie au maximum l'expression des solutions de (E_0) avant de continuer, en particulier quand il y a comme ici du ln dans la primitive.

3) Dans la méthode de variation de la constante, il est inutile de remplacer ψ par sa valeur avant la fin.

4) Une fois qu'on a trouvé z, on n'oublie pas de multiplier par ψ, car c'est y que l'on cherche.

5) Le résultat final est toujours de la forme $y(x) = \ldots + \lambda \ldots$, et on n'oublie pas de préciser que $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

Exercice 6 Résoudre (E) : $xy' - 2y = x$ sur $I =]0, +\infty[$.

Exercice 7 Résoudre (E) : $(\operatorname{ch} x)y' + (\operatorname{sh} x)y = 1$.

• Cas particulier : équation à coefficients constants

Dans le cas où l'équation est à coefficients constants, i.e. de la forme :

$$(E)\ :\ y' + ay = b(x),$$

où $a \in \mathbb{C}$, et pour certains types de seconds membres, on peut utiliser les méthodes suivantes pour déterminer une solution particulière de (E).

1) Si le second membre est un polynôme, on peut chercher une solution polynomiale de même degré.

Exercice 8 Résoudre $(E) : y' - 2y = x^2$.

2) Si le second membre est de la forme $P(x)e^{\alpha x}$, où P est un polynôme de degré n et $\alpha \in \mathbb{C}$, on peut chercher une solution de la forme $y(x) = Q(x)e^{\alpha x}$ avec Q de degré n si $\alpha \neq -a$, de degré $n+1$ si $\alpha = -a$ (i.e. si $x \mapsto e^{\alpha x}$ est solution de l'équation homogène).

Exercice 9 Résoudre $(E_1) : y' - 2y = xe^x$ puis $(E_2) : y' - 2y = xe^{2x}$.

3) Si $a \in \mathbb{R}$ et que le second membre est de la forme $P(x)\cos\omega x$ ou $P(x)\sin\omega x$, où P est un polynôme à coefficients réels, on commence par chercher une solution particulière de l'équation $y' + ay = P(x)e^{i\omega x}$ et on en prend la partie réelle (pour $P(x)\cos\omega x$) ou la partie imaginaire (pour $P(x)\sin\omega x$). Si P est constant, on peut aussi chercher directement une solution de la forme $\alpha\cos\omega x + \beta\sin\omega x$.

Exercice 10 Résoudre $(E) : y' - 2y = \sin 3x$.

Remarque : Ces techniques ne marchent qu'avec des équations *à coefficients constants.*

4 Solution satisfaisant à une condition initiale

Définition 4 *Soient $a, b : I \to \mathbb{C}$ des fonctions continues sur I, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{C}$. On dit que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une solution de l'équation $(E) : y' + a(x)y = b(x)$ satisfaisant à la* **condition initiale** *$y(x_0) = y_0$ si f est solution de (E) et que $f(x_0) = y_0$.*
On dit aussi que f est une solution au **problème de Cauchy** $\left\{ \begin{array}{l} y' + a(x)y = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right.$.

Interprétation graphique (cas réel) : cela revient à demander que la courbe représentative de la solution passe par le point de coordonnées (x_0, y_0).

Théorème 11 *Il existe une unique solution au problème de Cauchy* $\left\{ \begin{array}{l} y' + a(x)y = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right.$.

Démonstration :
Posons, pour tout $x \in I$, $A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)dt$, $\psi(x) = e^{-A(x)}$ et $F(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{\psi(t)}dt = \int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}dt$.
A et F sont des primitives de a et $\frac{b}{\psi}$ respectivement, et elles s'annulent en x_0. D'après le théorème 9, les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $x \mapsto F(x)\psi(x) + \lambda\psi(x)$, où $\lambda \in \mathbb{C}$.
Soit y une telle fonction. Alors $y(x_0) = F(x_0)\psi(x_0) + \lambda\psi(x_0) = \lambda$ puisque $F(x_0) = 0$ et que $\psi(x_0) = e^{-A(x_0)} = e^0 = 1$.
Par conséquent, $y(x_0) = y_0 \Leftrightarrow \lambda = y_0$. Il y a donc une solution unique au problème de Cauchy donné. $\square$

Exemple : Résoudre le problème de Cauchy $\left\{ \begin{array}{l} (1+x^2)y' + 2xy = x^2 \\ y(1) = 0 \end{array} \right.$.

On a vu que les solutions de l'équation $(1+x^2)y' + 2xy = x^2$ sont définies par $y(x) = \frac{x^3}{3(1+x^2)} + \frac{\lambda}{1+x^2}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
Alors $y(1) = \frac{1}{6} + \frac{\lambda}{2}$, donc : $y(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda}{2} = -\frac{1}{6} \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{3}$.
La solution cherchée est donc la fonction définie par $y(x) = \frac{x^3}{3(1+x^2)} - \frac{1}{3(1+x^2)} = \frac{x^3 - 1}{3(1+x^2)}$.

5 Principe de superposition

Proposition 12 *Soit l'équation différentielle $(E) : y' + a(x)y = b_1(x) + b_2(x)$, où $a, b_1, b_2 : I \to \mathbb{C}$ sont continues sur I. Si y_1 est solution de $(E_1) : y' + a(x)y = b_1(x)$ et que y_2 est solution de $(E_2) : y' + a(x)y = b_2(x)$, alors $y_1 + y_2$ est solution de (E).*

Démonstration : On a $y_1' + ay_1 = b_1$ et $y_2' + ay_2 = b_2$, donc $(y_1 + y_2)' + a(y_1 + y_2) = b_1 + b_2$. $\square$

Si on peut trouver facilement des solutions particulières pour les équations (E_1) et (E_2), on obtient une solution particulière de (E) en les additionnant.

Exercice 11 Résoudre $(E) : y' - 2y = x^2 + \sin 3x$.

III Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

1 Définitions

Définition 5 *Une* **équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants** *est une équation différentielle de la forme :*

$$(E)\ :\ ay''+by'+cy=f(x),$$

où $a,b,c\in\mathbb{C}$ (avec $a\neq 0$) et $f:I\to\mathbb{C}$ est une fonction continue sur I.

Résoudre *(E) sur I, c'est déterminer toutes les fonctions $y:I\to\mathbb{C}$ deux fois dérivables sur I et telles que $ay''(x)+by'(x)+cy(x)=f(x)$ pour tout $x\in I$. Une telle fonction est appelée* **solution** *de (E) sur I.*

L'équation (E) est dite **homogène** *ou* **sans second membre** *si f est la fonction nulle.*

L'équation sans second membre associée à *(E) est l'équation :*

$$(E_0)\ :\ ay''+by'+cy=0.$$

2 Résolution de l'équation homogène $(E_0)\ :\ ay''+by'+cy=0$

Définition 6 *On appelle* **équation caractéristique** *de (E_0) l'équation (d'inconnue $r\in\mathbb{C}$) :*

$$(e)\ :\ ar^2+br+c=0.$$

Théorème 13 *Soit l'équation différentielle $(E_0)\ :\ ay''+by'+cy=0$, où $a,b,c\in\mathbb{C}$ avec $a\neq 0$. Soient (e) l'équation caractéristique de (E_0) et Δ le discriminant de (e).*

Si $\Delta=0$, alors les solutions de (E_0) sont les fonctions $y:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ définies par

$$y(x)=(\alpha x+\beta)e^{r_0x},$$

où r_0 est la racine double de (e) et $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$.

Si $\Delta\neq 0$, alors les solutions de (E_0) sont les fonctions $y:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ définies par

$$y(x)=\alpha e^{r_1x}+\beta e^{r_2x},$$

où r_1 et r_2 sont les racines de (e) et $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$.

Démonstration :

– Première étape : recherche des solutions exponentielles de (E_0)

On a vu que les solutions des équations du premier ordre à coefficients constants étaient des fonctions exponentielles. On peut conjecturer que c'est également le cas pour les équations du second ordre.

Soit donc $r\in\mathbb{C}$ et soit la fonction $y:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ définie par $y(x)=e^{rx}$. y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $y'(x)=re^{rx}$ et $y''(x)=r^2e^{rx}$. Alors :

$$\begin{aligned}
ay''+by'+cy=0 \quad&\Leftrightarrow\quad \forall x\in\mathbb{R},\ ar^2e^{rx}+bre^{rx}+ce^{rx}=0\\
&\Leftrightarrow\quad \forall x\in\mathbb{R},\ (ar^2+br+c)e^{rx}=0\\
&\Leftrightarrow\quad \forall x\in\mathbb{R},\ ar^2+br+c=0\\
&\Leftrightarrow\quad ar^2+br+c=0
\end{aligned}$$

Ainsi, y est solution de (E_0) si et seulement si r est racine de l'équation caractéristique (e). Si $\Delta=0$, (e) a une racine (double) r_0, donc la fonction exponentielle $x\mapsto e^{r_0x}$ est solution de (E_0). Si $\Delta\neq 0$, (e) a deux racines distinctes r_1 et r_2, donc les fonctions exponentielles $x\mapsto e^{r_1x}$ et $x\mapsto e^{r_2x}$ sont solutions de (E_0).

– Deuxième étape : recherche des autres solutions de (E_0)

Soit r une racine de (e). Soit $\psi:x\mapsto e^{rx}$ une solution exponentielle de (E_0). Elle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Soit $y:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Posons $y=z\psi$ (i.e. $z=\frac{y}{\psi}$). Alors z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, $y'=z'\psi+z\psi'$ et $y''=z''\psi+2z'\psi'+z\psi''$, et :

$$\begin{aligned}
ay''+by'+cy=0 \quad&\Leftrightarrow\quad a(z''\psi+2z'\psi'+z\psi'')+b(z'\psi+z\psi')+cz\psi=0\\
&\Leftrightarrow\quad az''\psi+(2a\psi'+b\psi)z'+\underbrace{(a\psi''+b\psi'+c\psi)}_{=0}z=0\\
&\Leftrightarrow\quad az''\psi+(2ar\psi+b\psi)z'=0\\
&\Leftrightarrow\quad (az''+(2ar+b)z')\psi=0\\
&\Leftrightarrow\quad az''+(2ar+b)z'=0\\
&\Leftrightarrow\quad z''+\left(2r+\frac{b}{a}\right)z'=0
\end{aligned}$$

Il n'y a plus de z : en posant $Z = z'$, on obtient l'équation du premier ordre $Z' + \left(2r + \frac{b}{a}\right) Z = 0$. Les solutions de cette équation sont les fonctions Z définies par $Z(x) = \lambda e^{-\left(2r+\frac{b}{a}\right)x}$, où $\lambda \in \mathbb{C}$.

On va maintenant distinguer les cas $\Delta = 0$ et $\Delta \neq 0$.

Premier cas : $\Delta = 0$. Alors $r = -\frac{b}{2a}$, donc $-\left(2r + \frac{b}{a}\right) = 0$. Ainsi :

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{C}, \forall\, x \in \mathbb{R},\, z'(x) = \lambda \\ &\Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \forall\, x \in \mathbb{R},\, z(x) = \lambda x + \mu \\ &\Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \forall\, x \in \mathbb{R},\, y(x) = (\lambda x + \mu) e^{rx} \end{aligned}$$

Deuxième cas : $\Delta \neq 0$. Alors $r = \frac{-b+\delta}{2a}$ où δ est une des racines carrées de Δ, donc $-\left(2r + \frac{b}{a}\right) = -\frac{\delta}{a} \neq 0$. Ainsi :

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{C}, \forall\, x \in \mathbb{R},\, z'(x) = \lambda e^{-\frac{\delta}{a}x} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda, \beta \in \mathbb{C}, \forall\, x \in \mathbb{R},\, z(x) = -\lambda \frac{a}{\delta} e^{-\frac{\delta}{a}x} + \beta \\ &\Leftrightarrow \quad \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall\, x \in \mathbb{R},\, z(x) = \alpha e^{-\frac{\delta}{a}x} + \beta \\ &\Leftrightarrow \quad \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall\, x \in \mathbb{R},\, y(x) = \alpha e^{\left(r - \frac{\delta}{a}\right)x} + \beta e^{rx} \end{aligned}$$

Or $r - \frac{\delta}{a} = \frac{-b-\delta}{2a}$: c'est l'autre racine de (e). Par conséquent :

$$ay'' + by' + cy = 0 \Leftrightarrow \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall\, x \in \mathbb{R},\, y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x},$$

où r_1 et r_2 sont les racines de (e). □

Remarque : Les solutions sont les combinaisons linéaires des fonctions $x \mapsto e^{r_0 x}$ et $x \mapsto x e^{r_0 x}$ si $\Delta = 0$, ou des fonctions $x \mapsto e^{r_1 x}$ et $x \mapsto e^{r_2 x}$ si $\Delta \neq 0$. On dit que l'ensemble des solutions de (E_0) est un *plan vectoriel.*

Exercice 12 Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' - iy' + 2y = 0$.

3 Résolution de (E_0) dans le cas réel

Théorème 14 *Soit l'équation différentielle (E_0) : $ay'' + by' + cy = 0$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. Soient (e) l'équation caractéristique de (E_0) et Δ le discriminant de (e).*

Si $\Delta > 0$, alors les solutions de (E_0) à valeurs réelles sont les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x},$$

où r_1 et r_2 sont les racines de (e) et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Si $\Delta = 0$, alors les solutions de (E_0) à valeurs réelles sont les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$y(x) = (\alpha x + \beta) e^{r_0 x},$$

où r_0 est la racine double de (e) et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Si $\Delta < 0$, alors les solutions de (E_0) à valeurs réelles sont les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$y(x) = \alpha e^{px} \cos(qx) + \beta e^{px} \sin(qx),$$

où $p + iq$ et $p - iq$ ($p, q \in \mathbb{R}$) sont les racines de (e) et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Démonstration :

− Premier cas : $\Delta > 0$.

(e) a alors deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, et (E_0) a pour solutions complexes les fonctions définies par $y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Puisque les fonctions $x \mapsto e^{r_1 x}$ et $x \mapsto e^{r_2 x}$ sont à valeurs réelles, on se convaincra aisément (par exemple en exprimant α et β en fonction de $y(0)$ et $y(1)$) que y est à valeurs réelles si et seulement si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

− Deuxième cas : $\Delta = 0$.

(e) a alors une racine réelle double r_0, et (E_0) a pour solutions complexes les fonctions définies par $y(x) = (\alpha x + \beta) e^{r_0 x}$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Puisque les fonctions $x \mapsto e^{r_0 x}$ et $x \mapsto x e^{r_0 x}$ sont à valeurs réelles, on se convaincra aisément (par exemple en exprimant α et β en fonction de $y(0)$ et $y(1)$) que y est à valeurs réelles si et seulement si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

− Troisième cas : $\Delta < 0$.

(e) a alors deux racines complexes conjuguées distinctes r_1 et r_2, et (E_0) a pour solutions complexes les fonctions définies par $y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Cette fois les fonctions $x \mapsto e^{r_1 x}$ et $x \mapsto e^{r_2 x}$ ne sont pas à valeurs réelles. L'idée ici pour déterminer les solutions de (E_0) à valeurs réelles est d'exprimer les exponentielles complexes sous forme algébrique.

Posons $r_1 = p + iq$ et $r_2 = p - iq$ (avec $p, q \in \mathbb{R}$). Alors :

$$\begin{aligned} y(x) &= \alpha e^{(p+iq)x} + \beta e^{(p-iq)x} \\ &= \alpha e^{px+iqx} + \beta e^{px-iqx} \\ &= \alpha e^{px} e^{iqx} + \beta e^{px} e^{-iqx} \\ &= \alpha e^{px}(\cos(qx) + i\sin(qx)) + \beta e^{px}(\cos(qx) - i\sin(qx)) \\ &= (\alpha+\beta)e^{px}\cos(qx) + i(\alpha-\beta)e^{px}\sin(qx) \end{aligned}$$

Les fonctions $x \mapsto e^{px}\cos(qx)$ et $x \mapsto e^{px}\sin(qx)$ sont à valeurs réelles. On se convaincra, toujours par exemple en exprimant $\alpha+\beta$ et $i(\alpha-\beta)$ en fonction de $y(0)$ et $y(1)$, que y est à valeurs réelles si et seulement si $\alpha+\beta$ et $i(\alpha-\beta)$ sont des réels.

Les solutions de (E_0) à valeurs réelles sont donc de la forme $y(x) = \lambda e^{px}\cos(qx) + \mu e^{px}\sin(qx)$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, et toutes les fonctions de ce type sont solutions de (E_0) car pour tout couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ il existe un couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda = \alpha+\beta$ et $\mu = i(\alpha-\beta)$. □

Exercice 13 Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned} (E_1) &\ :\ y'' - 5y' + 6y = 0 \\ (E_2) &\ :\ y'' + 2y' + y = 0 \\ (E_3) &\ :\ y'' + 2y' + 5y = 0 \end{aligned}$$

On cherche les solutions à valeurs réelles.

4 Résolution de l'équation avec second membre

On note toujours $(E)\ :\ ay'' + by' + cy = f(x)$ et $(E_0)\ :\ ay'' + by' + cy = 0$.

• Principe

Le principe de la résolution est le même que pour les équations du premier ordre :

Théorème 15 *Si on connaît une solution particulière y_1 de (E), on obtient toutes les solutions de (E) en ajoutant à y_1 les solutions de l'équation sans second membre associée à (E).*

Démonstration :
y_1 est une solution de (E), donc $ay_1'' + by_1' + cy_1 = f$. Soit y une fonction dérivable sur I. Alors :

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy = f &\Leftrightarrow ay'' + by' + cy = ay_1'' + by_1' + cy_1 \\ &\Leftrightarrow a(y-y_1)'' + b(y-y_1)' + c(y-y_1) = 0 \\ &\Leftrightarrow y - y_1 \text{ est solution de } (E_0) \\ &\Leftrightarrow \exists\, y_0 \text{ solution de } (E_0),\ y = y_1 + y_0. \square \end{aligned}$$

On retiendra :

Solution générale de (E) = solution particulière de (E) + solution générale de (E_0)

On va maintenant voir comment déterminer une solution particulière de (E) pour certains types de seconds membres.

• Cas où le second membre est un polynôme

Proposition 16 *Soit l'équation différentielle $(E)\ :\ ay'' + by' + cy = P(x)$, où $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ et P est un polynôme de degré n.*

Si $c \neq 0$, alors (E) a une unique solution polynomiale de degré n.

Si $c = 0$ et $b \neq 0$, alors (E) a une infinité de solutions polynomiales de degré $n+1$.

Si $c = b = 0$, alors (E) a une infinité de solutions polynomiales de degré $n+2$.

Démonstration : On admet ce résultat. L'idée est la suivante :
Cherchons une solution particulière y polynomiale de degré p. Alors y' est de degré $p-1$ et y'' de degré $p-2$.
Si $c \neq 0$, alors $ay'' + by' + cy$ est de degré p : pour avoir $ay'' + by' + cy = P$, il faut que $p = n$.
Si $c = 0$ mais que $b \neq 0$, alors $ay'' + by' + cy = ay'' + by'$ est de degré $p-1$: pour avoir $ay'' + by' + cy = P$, il faut que $p = n+1$.
Si $c = b = 0$ (par hypothèse $a \neq 0$), alors $ay'' + by' + cy = ay''$ est de degré $p-2$: pour avoir $ay'' + by' + cy = P$, il faut que $p = n+2$.

On admet que ces solutions existent effectivement. □

Exercice 14 Résoudre les équations différentielles suivantes (solutions à valeurs réelles) :

$$\begin{aligned} (E_1) &\ :\ y'' - 5y' + 6y = x^2 + 1 \\ (E_2) &\ :\ y'' + y' = x^2 + 1 \\ (E_3) &\ :\ y'' = x^2 + 1 \end{aligned}$$

• Cas où le second membre est de la forme $P(x)e^{\alpha x}$

Proposition 17 *Soit l'équation différentielle* $(E)\ :\ ay''+by'+cy = P(x)e^{\alpha x}$*, où* $a, b, c \in \mathbb{C}$*,* $a \neq 0$*,* P *est un polynôme de degré* n *et* $\alpha \in \mathbb{C}$*. Soit* (e) *l'équation caractéristique de* (E)*.*

Si α *n'est pas racine de* (e)*, alors* (E) *a une unique solution de la forme* $x \mapsto Q(x)e^{\alpha x}$*, où* Q *est une fonction polynomiale de degré* n*.*

Si α *est racine simple de* (e)*, alors* (E) *a une infinité de solutions de la forme* $x \mapsto Q(x)e^{\alpha x}$*, où* Q *est une fonction polynomiale de degré* $n+1$*.*

Si α *est racine double de* (e)*, alors* (E) *a une infinité de solutions de la forme* $x \mapsto Q(x)e^{\alpha x}$*, où* Q *est une fonction polynomiale de degré* $n+2$*.*

Démonstration :
Soit y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Posons $y(x) = z(x)e^{\alpha x}$ (i.e. $z(x) = y(x)e^{-\alpha x}$). Alors z est également deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, $y'(x) = z'(x)e^{\alpha x} + \alpha z(x)e^{\alpha x} = (z'(x) + \alpha z(x))e^{\alpha x}$, et $y''(x) = z''(x)e^{\alpha x} + 2\alpha z'(x)e^{\alpha x} + \alpha^2 z(x)e^{\alpha x} = (z''(x) + 2\alpha z'(x) + \alpha^2 z(x))e^{\alpha x}$. Alors :

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de } (E) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ ay''(x) + by'(x) + cy(x) = P(x)e^{\alpha x}\\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ a(z''(x) + 2\alpha z'(x) + \alpha^2 z(x))e^{\alpha x} + b(z'(x) + \alpha z(x))e^{\alpha x} + cz(x)e^{\alpha x} = P(x)e^{\alpha x}\\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (az''(x) + (2a\alpha + b)z'(x) + (a\alpha^2 + b\alpha + c)z(x))e^{\alpha x} = P(x)e^{\alpha x}\\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ az''(x) + (2a\alpha + b)z'(x) + (a\alpha^2 + b\alpha + c)z(x) = P(x)\\
&\Leftrightarrow z \text{ solution de } (E')\ :\ az'' + (2a\alpha + b)z' + (a\alpha^2 + b\alpha + c)z = P(x)
\end{aligned}$$

Le second membre de l'équation (E') est une fonction polynomiale : on a vu au paragraphe précédent qu'on peut toujours trouver une solution polynomiale de (E'). De plus, $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ si et seulement si α est racine de (e) et $a\alpha^2 + b\alpha + c = 2a\alpha + b = 0$ si et seulement si α est racine double de (e). La proposition 16 permet de conclure. □

Exercice 15 Résoudre les équations différentielles suivantes (solutions à valeurs réelles) :

$$\begin{aligned}
(E_1) &\ :\ y'' - 5y' + 6y = xe^{x}\\
(E_2) &\ :\ y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}\\
(E_3) &\ :\ y'' + 2y' + y = xe^{-x}
\end{aligned}$$

• Cas où le second membre est de la forme $P(x)\cos\omega x$ ou $P(x)\sin\omega x$

Méthode générale : $\cos\omega x$ est la partie réelle de $e^{i\omega x}$ et $\sin\omega x$ est sa partie imaginaire. On peut donc commencer par chercher une solution de l'équation $ay'' + by' + cy = P(x)e^{i\omega x}$, et on prend la partie réelle de cette solution (pour $P(x)\cos\omega x$) ou sa partie imaginaire (pour $P(x)\sin\omega x$).

Cas particulier : si P est constant, on peut chercher une solution de la forme $x \mapsto \alpha\cos\omega x + \beta\sin\omega x$ (il y en a toujours une, sauf si $i\omega$ est racine de l'équation caractéristique, i.e. si l'équation homogène est de la forme $y'' + \omega^2 y = 0$).

Exercice 16 Résoudre les équations différentielles suivantes (solutions à valeurs réelles) :

$$\begin{aligned}
(E_1) &\ :\ y'' - 5y' + 6y = \cos x\\
(E_2) &\ :\ y'' + y = \cos x
\end{aligned}$$

• Principe de superposition

Proposition 18 *Soit l'équation différentielle* $(E)\ :\ ay'' + by' + cy = f_1(x) + f_2(x)$*, où* $a, b, c \in \mathbb{C}$*,* $a \neq 0$*, et* $f_1, f_2 : I \to \mathbb{C}$ *sont continues sur* I*. Si* y_1 *est solution de* $(E_1)\ :\ ay'' + by' + cy = f_1(x)$ *et que* y_2 *est solution de* $(E_2)\ :\ ay'' + by' + cy = f_2(x)$*, alors* $y_1 + y_2$ *est solution de* (E)*.*

Démonstration : On a $ay_1'' + by_1' + cy_1 = f_1$ et $ay_2'' + by_2' + cy_2 = f_2$, donc $a(y_1 + y_2)'' + b(y_1 + y_2)' + c(y_1 + y_2) = f_1 + f_2$. □

On peut ainsi trouver une solution particulière de toute équation dont le second membre est une somme de fonctions d'un des types précédemment étudiés : il suffit de trouver une solution particulière pour chacune de ces fonctions et de les additionner.

Exercice 17 Résoudre $(E)\ :\ y'' - 5y' + 6y = x^2 + 1 + xe^{2x} + \cos x$.

5 Solution satisfaisant à une condition initiale

On admet le théorème suivant :

Théorème 19 *Soit* $(E)\ :\ ay'' + by' + cy = f(x)$*, où* $a, b, c \in \mathbb{C}$ *(avec* $a \neq 0$*) et* $f : I \to \mathbb{C}$ *est une fonction continue sur* I*. Soient* $x_0 \in I$ *et* $y_0, y_0' \in \mathbb{C}$*. Il existe une unique solution* y *de* (E) *sur* I *telle que* $\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_0' \end{cases}$.

On dit alors que y est la solution unique du **problème de Cauchy** $\left\{\begin{array}{l} ay'' + by' + cy = f(x) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y'_0 \end{array}\right.$.

Remarque : Pour avoir l'unicité de la solution d'une équation différentielle du second ordre, il faut donc *deux* conditions initiales : une sur la fonction inconnue et une autre sur sa dérivée.

Interprétation graphique (cas réel) : cela revient à demander que la courbe représentative de la solution passe par le point de coordonnées (x_0, y_0), et que la pente de la tangente à la courbe en ce point soit égale à y'_0.

Exercice 18 Résoudre le problème de Cauchy $\left\{\begin{array}{l} y'' - 5y' + 6y = \cos x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{array}\right.$.