Fiche d'exercices : Primitives et équations différentielles

Exercice 1 Calculer les intégrales ou les primitives suivantes :

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx \;;\; \int_0^1 \sqrt[3]{x}\,dx \;;\; \int \frac{dx}{\sqrt{x}} \;;\; \int (4x+1)^7 dx \;;\; \int \frac{dx}{3x+2} \;;\; \int \frac{dx}{(3x-1)^5}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} \;;\; \int \frac{x}{1+x^2}dx \;;\; \int \frac{x^2}{1+x^2}dx \;;\; \int \frac{x^3}{1+x^2}dx \;;\; \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \;;\; \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx \;;\; \int x^2 e^x\,dx \;;\; \int_0^{1/2} \operatorname{Arcsin} x\,dx \;;\; \int x^p \ln x\,dx \;(p \neq -1) \;;\; \int \frac{\ln x}{x}dx$$

$$\int_0^4 \frac{dx}{2+\sqrt{x}} \;;\; \int x\sqrt[3]{x+1}\,dx \;;\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx \;;\; \int x e^{x^2}dx \;;\; \int_0^{\pi} \sin(2x) e^{\cos x}dx$$

$$\int \frac{dx}{x^2+x} \;;\; \int \frac{dx}{x^2+2x+1} \;;\; \int \frac{dx}{2x^2+3} \;;\; \int \frac{dx}{x^2-2x+2} \;;\; \int \frac{3x^2-2}{x^3-2x+1}dx$$

$$\int \sin 2x\,dx \;;\; \int \cos^2 x\,dx \;;\; \int \sin^4 x\cos x\,dx \;;\; \int \sin^5 x\,dx \;;\; \int \sin^4 x\,dx$$

$$\int \frac{\operatorname{Arcsin} x}{\sqrt{1-x^2}}dx \;;\; \int \frac{dx}{x\ln x} \;;\; \int \frac{e^x}{1+e^x}dx \;;\; \int \frac{dx}{1+e^x} \;;\; \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx \;;\; \int e^{2x}\sin 3x\,dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} \;;\; \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4 x} \;;\; \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}dx \;;\; \int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} \;;\; \int \frac{dx}{\operatorname{sh} x} \;;\; \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx$$

$$\int_0^2 (1-|x-1|)^3 dx \;;\; \int \frac{x\operatorname{Arcsin}(x^2)}{\sqrt{1-x^4}}dx \;;\; \int_0^1 \sqrt{x(1-x)}dx \;;\; \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Exercice 2 Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x+i}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x+j}$.

Exercice 3 Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$y'+2y=0 \;;\; y'-xy=0 \;;\; y'+\frac{y}{x}=0.$$

Exercice 4 Résoudre les équations différentielles suivantes :

$xy'+(1+x)y=1$ (sur $\mathbb{R}_+^*$) ; $(x^2+1)y'+4xy=3x$; $y'-y\tan x=\sin 2x$ (sur $]-\pi/2,\pi/2[$).

Exercice 5 Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$y'=x+y \;;\; y'-y=\sin 2x \;;\; y'+y=\frac{1}{1+\mathrm{e}^x} \text{ avec } y(0)=0.$$

Exercice 6 Résoudre l'équation (E) : $(x^2+1)y'+(x-1)^2y=x^3-x^2+x+1$. On pourra chercher une solution polynomiale.

Exercice 7 Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$xy'+y=0 \;;\; xy'-y=0 \;;\; xy'-2y=0 \;;\; x^2y'-y=0 \;;\; x^3y'-y=0.$$

Exercice 8 Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$yy'=1 \;;\; y'=e^y \;;\; y'-y^2=1 \;;\; x^2+y^2-2xyy'=0 \;;\; y'=|y|.$$

Exercice 9 Déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)+f(x)=f(0)+f(1)$.

Exercice 10 Déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tous $x,y\in\mathbb{R}$, $f(x+y)=f(x)f(y)$.

Exercice 11 Déterminer l'ensemble des fonctions f définies et dérivables sur $]0,+\infty[$ telles que, pour tout $a>0$, la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a passe par le point de coordonnées $(0,a)$.

Exercice 12 Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$y''-3y'+2y=0 \;;\; 4y''-4y'+y=0 \;;\; y''-4y'+13y=0.$$

Exercice 13 Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$y''-4y'+5y=xe^{-x} \;;\; y''-6y'+8y=x^2+\mathrm{e}^{-2x} \;;\; 3y''-2y'-y=\operatorname{ch} x \;;\; 3y''-2y'-y=\cos 2x.$$

Exercice 14 Résoudre l'équation différentielle $my''-(1+m^2)y'+my=e^x$, où m est un réel fixé.

Exercice 15 Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$y''+6y'+9y=\frac{e^{-3x}}{\sqrt{1-x^2}} \;;\; (1+x)^2y''+(1+x)y'=2 \;;\; y''+y=\frac{1}{\cos^3 x}.$$

Exercice 16 Résoudre l'équation différentielle (E) : $xy''+2(x+1)y'+(x+2)y=0$ en posant $z=xy$.

Exercice 17 Soit l'équation (E) : $(x^2+1)y''+2(x^2+x+1)y'+(x+1)^2y=e^{-x}$.

1) Trouver une solution exponentielle y_0 de l'équation homogène associée à (E).

2) Résoudre (E) à l'aide du changement d'inconnue $y=zy_0$.

Exercice 18

1) Résoudre l'équation différentielle (E) : $x^2y''-2y=x$ sur $]0,+\infty[$ à l'aide du changement de variables $x=e^t$.

2) Résoudre (E) sur $]-\infty,0[$.

Exercice 19 Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle (E) : $xy''-y'-x^3y=0$ (poser $x=\sqrt{t}$).

Exercice 20 (X PC 2010) Résoudre l'équation différentielle (E) : $(1+x^2)y''-2y=0$.

Exercice 21 Déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)+f(-x)=e^x$.