Correction du DNS 5

EXERCICE 1

La somme cherchée est la partie réelle de $S = e^{i\frac{\pi}{17}} + e^{i\frac{3\pi}{17}} + \ldots + e^{i\frac{15\pi}{17}}$. Or :

$$\begin{aligned}
S &= e^{i\frac{\pi}{17}} \left(1 + e^{i\frac{2\pi}{17}} + \ldots + e^{i\frac{14\pi}{17}}\right) \\
&= e^{i\frac{\pi}{17}} \left(1 + e^{i\frac{2\pi}{17}} + \ldots + \left(e^{i\frac{2\pi}{17}}\right)^7\right) \\
&= e^{i\frac{\pi}{17}} \times \frac{1 - e^{i\frac{16\pi}{17}}}{1 - e^{i\frac{2\pi}{17}}} \text{ (somme géométrique)} \\
&= e^{i\frac{\pi}{17}} \times \frac{e^{i\frac{8\pi}{17}}\left(e^{-i\frac{8\pi}{17}} - e^{i\frac{8\pi}{17}}\right)}{e^{i\frac{\pi}{17}}\left(e^{-i\frac{\pi}{17}} - e^{i\frac{\pi}{17}}\right)} \\
&= e^{i\frac{8\pi}{17}} \times \frac{-2i \sin\frac{8\pi}{17}}{-2i\sin\frac{\pi}{17}} \\
&= e^{i\frac{8\pi}{17}} \times \frac{\sin\frac{8\pi}{17}}{\sin\frac{\pi}{17}}.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathrm{Re}(S) = \frac{\sin\frac{8\pi}{17}\cos\frac{8\pi}{17}}{\sin\frac{\pi}{17}} = \frac{\sin\frac{16\pi}{17}}{2\sin\frac{\pi}{17}}$$

en utilisant la formule $\sin x \cos x = \dfrac{\sin(2x)}{2}$. Mais $\sin\frac{16\pi}{17} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{17}\right) = \sin\frac{\pi}{17}$, donc

$$\mathrm{Re}(S) = \frac{1}{2}.$$

EXERCICE 2

Posons $Z = z^4$. L'équation devient

$$(E') \, : \, Z^2 - (5+i)Z + 4 + 4i = 0.$$

C'est une équation du second degré dont le discriminant est $(5+i)^2 - 4(4+4i) = 8 - 6i$. En appliquant la méthode vue en cours, on trouve que les racines carrées de $8 - 6i$ sont $3 - i$ et $-3 + i$ (calculs à détailler). Les solutions de (E') sont donc $\dfrac{5 + i + 3 - i}{2} = 4$ et $\dfrac{5 + i - (3 - i)}{2} = 1 + i$.

On pouvait aussi deviner ces solutions en remarquant que la somme des racines de (E') est $5+i$ et leur produit $4+4i$.

Résolvons l'équation $z^4 = 4$. On voit que $\sqrt{2}^4 = 4$, on obtient les autres solutions en multipliant par les racines quatrièmes de l'unité $(1,\, i,\, -1,\, -i)$, ce qui donne $\sqrt{2}$, $i\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$ et $-i\sqrt{2}$.

Résolvons l'équation $z^4 = 1 + i$. On a $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ donc on voit que $2^{1/8}e^{i\pi/16}$ est solution. En multipliant par les racines quatrièmes de l'unité on obtient toutes les solutions : $2^{1/8}e^{i\pi/16}$, $2^{1/8}e^{9i\pi/16}$, $2^{1/8}e^{17i\pi/16}$ et $2^{1/8}e^{25i\pi/16}$.

L'équation a donc huit solutions :

$$\sqrt{2}, i\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -i\sqrt{2}, 2^{1/8}e^{i\pi/16}, 2^{1/8}e^{9i\pi/16}, 2^{1/8}e^{17i\pi/16} \text{ et } 2^{1/8}e^{25i\pi/16}.$$

EXERCICE 3

1) a) On a $u = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $\overline{u} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$S_n = \sqrt{2}^n e^{i\frac{n\pi}{4}} + \sqrt{2}^n e^{-i\frac{n\pi}{4}} = \sqrt{2}^n \left(e^{i\frac{n\pi}{4}} + e^{-i\frac{n\pi}{4}}\right) = 2\sqrt{2}^n \cos\frac{n\pi}{4}.$$

c) On a :

$$\begin{aligned}
S_n = 0 &\Leftrightarrow \cos\frac{n\pi}{4} = 0 \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \frac{n\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2 + 4k.
\end{aligned}$$

Ainsi $S_n = 0$ si et seulement si n est de la forme $4k+2$ avec $k \in \mathbb{N}$.

d) Soit $n = 2k$ où $k \in \mathbb{N}$. Alors $S_n = 2\sqrt{2}^{2k} \cos \dfrac{2k\pi}{4} = 2^{k+1} \cos \dfrac{k\pi}{2} \in \mathbb{Z}$ car $\cos \dfrac{k\pi}{2} = 0$ ou 1 ou -1.

2) a) D'après la formule du binôme de Newton, on a $(1+i)^{2m} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2m} \binom{2m}{k} i^k$ et $(1-i)^{2m} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2m} \binom{2m}{k} (-i)^k$.

b) On a $i^{2p+1} + (-i)^{2p+1} = i^{2p+1} - i^{2p+1} = 0$ et $i^{2p} + (-i)^{2p} = i^{2p} + i^{2p} = 2i^{2p} = 2(-1)^p$.

c) On a, d'une part,

$$S_{2m} = 2^{m+1} \cos \frac{m\pi}{2}$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned}
S_{2m} &= (1+i)^{2m} + (1-i)^{2m} \\
&= \sum_{k=0}^{2m} \binom{2m}{k} i^k + \sum_{k=0}^{2m} \binom{2m}{k} (-i)^k \\
&= \sum_{k=0}^{2m} \binom{2m}{k} (i^k + (-i)^k) \\
&= \sum_{p=0}^{m} \binom{2m}{2p} (i^{2p} + (-i)^{2p}) + \sum_{p=0}^{m-1} \binom{2m}{2p+1} (i^{2p+1} + (-i)^{2p+1}) \\
&= \sum_{p=0}^{m} \binom{2m}{2p} 2(-1)^p \\
&= 2 \sum_{p=0}^{m} \binom{2m}{2p} (-1)^p.
\end{aligned}$$

donc

$$\sum_{p=0}^{m} \binom{2m}{2p} (-1)^p = 2^m \cos \frac{m\pi}{2}.$$

EXERCICE 4

1) L'affixe de N est iz (multiplier un nombre complexe par i revient à ajouter $\pi/2$ à son argument puisque $i = e^{i\pi/2}$).

On peut aussi dire que $OM = ON$ et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = \pi/2$, donc $|z_M - z_O| = |z_N - z_O|$ et $\arg \dfrac{z_N - z_O}{z_M - z_O} = \pi/2$, donc $\dfrac{z_N - z_O}{z_M - z_O} = e^{i\pi/2} = i$, et le résultat s'ensuit.

Les affixes des points P, Q, R et S sont donc respectivement $\dfrac{1+i}{2}$, $\dfrac{i+z}{2}$, $\dfrac{z+iz}{2}$ et $\dfrac{1+iz}{2}$.

2) Les affixes des vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{SR}$ sont $z_Q - z_P = \dfrac{z-1}{2}$ et $z_R - z_S = \dfrac{z-1}{2}$, donc ces vecteurs sont égaux. On en déduit que le quadrilatère $PQRS$ est un parallélogramme.

De plus on a $\dfrac{z_S - z_P}{z_Q - z_P} = \dfrac{iz - i}{z - 1} = i$, donc $PQ = PS$ et $(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PS}) = \dfrac{\pi}{2}$: le quadrilatère $PQRS$ est un carré.

3) L'aire du carré $PQRS$ est

$$PQ^2 = \frac{1}{4}|z-1|^2 = \frac{1}{4}|(\rho\cos\theta - 1) + i\rho\sin\theta|^2 = \frac{1}{4}(\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta - 2\rho\cos\theta + 1) = \frac{1}{4}(\rho^2 - 2\rho\cos\theta + 1).$$

Elle est maximale lorsque $\cos\theta = -1$, i.e. lorsque $\theta \equiv \pi$ modulo 2π.