Devoir n°7 (non surveillé)

EXERCICE 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$e^{6x} - e^{4x} - 9e^{2x} + 9 = 0.$$

EXERCICE 2

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

À tout nombre complexe $z \neq 1$ on associe le nombre complexe $z' = \dfrac{z-i}{z-1}$.

1) On pose $z = x + iy$, où x et y sont des réels.

a) Exprimer le module, la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de x et de y.

b) En déduire :

(i) l'ensemble E_1 des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$,

(ii) l'ensemble E_2 des points M d'affixe z tels que z' soit un nombre réel.

2) Soient A, B et M les points d'affixes respectives 1, i et z.

a) Interpréter géométriquement le module et l'argument de z'.

b) Retrouver alors les résultats de la question 1)b).

3) a) Soit $\theta \in]0, 2\pi[$ et soit $z = e^{i\theta}$. Montrer que $z' = \dfrac{1+i}{2}\left(1 - \cot\dfrac{\theta}{2}\right)$.

b) En déduire que si le point M d'affixe $z \neq 1$ appartient au cercle de centre O et de rayon 1, alors le point M' d'affixe z' appartient à la droite d'équation $y = x$.

EXERCICE 3

On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par :

$$\forall\, x \in [0, 1], f(x) = \operatorname{Arcsin}\sqrt{x} - \operatorname{Arcsin}\sqrt{1-x}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan.

1) a) Montrer que f est dérivable sur $]0, 1[$ et vérifier que, pour tout $x \in]0, 1[$, $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$.

b) En déduire le tableau de variations de f.

2) Montrer que $f(x) = \operatorname{Arcsin}(2x - 1)$ pour tout $x \in [0, 1]$.

3) Montrer que $\mathcal{C}$ rencontre l'axe des abscisses en un unique point A dont on donnera les coordonnées. Donner une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en A.

4) Étudier la convexité de f. Que peut-on en déduire pour le point A ?

5) Déterminer les antécédents de $\pi/6$ par f.

6) Tracer $\mathcal{C}$.