Correction du DNS 6

EXERCICE 1

1) La fonction f est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ (somme de fonctions dérivables). Pour tout $x>0$:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2}.$$

2) La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = 2xe^x + x^2e^x = (x^2+2x)e^x = x(x+2)e^x.$$

3) À l'aide d'un tableau de signes on voit que $\dfrac{1+2x}{2-x} > 0$ si et seulement si $-1/2 < x < 2$. La fonction ln est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ donc h est définie et dérivable sur $]-1/2, 2[$ par composition. Pour tout $x \in]-1/2, 2[$:

$$h(x) = \ln(1+2x) - \ln(2-x)$$

donc

$$h'(x) = \frac{2}{1+2x} - \frac{-1}{2-x} = \frac{2(2-x)+(1+2x)}{(1+2x)(2-x)} = \frac{5}{(1+2x)(2-x)}.$$

4) En écrivant

$$x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln x} = e^{\frac{\ln x}{x}}$$

on voit que la fonction i est définie et dérivable sur $D =]0,+\infty[$ d'après les théorèmes sur les opérations. Pour tout $x \in D$:

$$i'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} e^{\frac{\ln x}{x}} = \frac{1-\ln x}{x^2} e^{\frac{\ln x}{x}}.$$

5) La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et elle est strictement positive sur les intervalles de la forme $]2k\pi, (2k+1)\pi[$ où $k \in \mathbb{Z}$. La fonction racine carrée est dérivable sur $]0,+\infty[$. Par composition la fonction j est donc dérivable sur

$$D = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi, (2k+1)\pi[.$$

Pour tout $x \in D$:

$$j'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}.$$

6) Les fonctions ch et $x \mapsto x^3$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc k aussi par composition. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$k'(x) = 3\operatorname{ch}^2(x)\operatorname{sh}(x).$$

7) Les fonctions $x \mapsto x^3$ et ch sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc ℓ aussi par composition. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\ell'(x) = 3x^2\operatorname{sh}(x^3).$$

8) La fonction ch est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc m aussi par composition. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$m'(x) = \operatorname{sh}(\operatorname{ch}(\operatorname{ch}(x)))\operatorname{sh}(\operatorname{ch}(x))\operatorname{sh}(x).$$

9) La fonction Arcsin est définie sur $[-1,1]$ et :

$$-1 \leqslant \tan x \leqslant 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, -\pi/4 + k\pi \leqslant x \leqslant \pi/4 + k\pi.$$

La fonction n est donc définie sur les intervalles de la forme $[-\pi/4+k\pi, \pi/4+k\pi]$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Mais Arcsin est dérivable seulement sur $]-1,1[$ donc n est dérivable sur

$$D = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]-\pi/4+k\pi, \pi/4+k\pi[.$$

Pour tout $x \in D$:

$$n'(x) = \frac{1+\tan^2 x}{\sqrt{1-\tan^2 x}}.$$

EXERCICE 2

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f(-x) = \cos(-3x)\cos^3(-x) = \cos(3x)\cos^3(x) = f(x)$$

donc f est paire, et

$$f(x+\pi) = \cos(3x+3\pi)\cos^3(x+\pi) = -\cos(3x)(-\cos(x))^3 = \cos(3x)\cos^3(x) = f(x)$$

donc f est π-périodique.

Puisque f est π-périodique, il suffit de l'étudier sur un intervalle de longueur π, par exemple sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. On obtiendra alors la courbe entière par translations. De plus, f est paire, donc il suffit de l'étudier sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$: on obtiendra la partie de la courbe correspondant à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ par symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées.

2) a) La fonction f est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ comme produit de fonctions dérivables, et pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a

$$f'(x) = -3\sin 3x\cos^3 x - 3\cos 3x\cos^2 x\sin x = -3\cos^2 x(\sin 3x\cos x + \sin x\cos 3x) = -3\cos^2 x\sin 4x$$

en utilisant une formule d'addition : $\sin 4x = \sin(3x+x) = \sin 3x\cos x + \sin x\cos 3x$.

b) On a donc $f'(x) = 0$ si et seulement si $\cos^2 x = 0$ ou $\sin 4x = 0$. Sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a :

$$\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

et :

$$\sin 4x = 0 \Leftrightarrow \left(x = 0 \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{\pi}{2}\right).$$

Le signe de $f'(x)$ est l'opposé de celui de $\sin 4x$, donc $f'(x) < 0$ sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ et $f'(x) > 0$ sur $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$.

La fonction f est donc strictement décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Dans le tableau de variation on ajoute $f(0) = 1$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cos^3\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = -\frac{1}{4}$ et $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

3) Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}
f(x) = 0 &\Leftrightarrow \cos 3x\cos^3 x = 0 \\
&\Leftrightarrow (\cos 3x = 0 \text{ ou } \cos x = 0) \\
&\Leftrightarrow \left(3x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + k\pi\right) \ (k \in \mathbb{Z}) \\
&\Leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + k\pi\right) \ (k \in \mathbb{Z}) \\
&\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z})
\end{aligned}$$

car on peut écrire $\frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + 3k\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + (3k+1)\frac{\pi}{3}$.

Les points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses ont donc pour coordonnées $\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}, 0\right)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

5) On linéarise $f(x)$ avec les formules d'Euler :

$$\begin{aligned}
\cos^3 x\cos 3x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 \frac{e^{i3x} + e^{-i3x}}{2} \\
&= \frac{(e^{ix} + e^{-ix})^3}{8}\frac{e^{i3x} + e^{-i3x}}{2} \\
&= \frac{1}{16}\left(e^{i3x} + 3e^{i2x}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-i2x} + e^{-i3x}\right)\left(e^{i3x} + e^{-i3x}\right) \\
&= \frac{1}{16}\left(e^{i3x} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-i3x}\right)\left(e^{i3x} + e^{-i3x}\right) \\
&= \frac{1}{16}\left(e^{i6x} + 3e^{i4x} + 3e^{i2x} + 1 + 1 + 3e^{-i2x} + 3e^{-i4x} + e^{-i6x}\right) \\
&= \frac{1}{16}\left(e^{i6x} + e^{-i6x} + 3\left(e^{i4x} + e^{-i4x}\right) + 3\left(e^{i2x} + e^{-i2x}\right) + 2\right) \\
&= \frac{1}{16}(2\cos 6x + 6\cos 4x + 6\cos 2x + 2) \\
&= \frac{1}{8}\cos 6x + \frac{3}{8}\cos 4x + \frac{3}{8}\cos 2x + \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

Une primitive de $x \mapsto \cos nx$ est $x \mapsto \dfrac{\sin nx}{n}$, donc une primitive de f est

$$F : x \mapsto \frac{1}{48}\sin 6x + \frac{3}{32}\sin 4x + \frac{3}{16}\sin 2x + \frac{x}{8}.$$

Finalement on peut calculer l'intégrale :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = \frac{\pi}{16}.$$