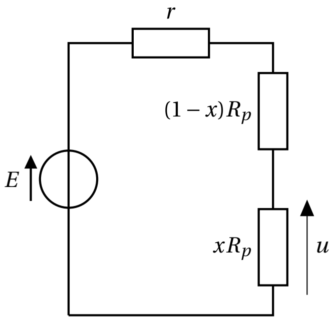
Corrigé DM6

Exercice 1 : Potentiomètre

1. Tant que la lampe est éteinte elle se comporte comme un interrupteur ouvert. On détermine la tension u à l'aide de la loi du pont diviseur de tension :

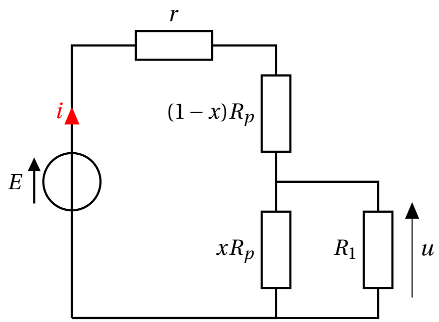


$$u = \frac{xR_p}{r+R_p}E \iff x = \left(1+\frac{r}{R_p}\right)\frac{u}{E}$$

On établit la condition pour laquelle la lampe reste éteinte. On note $U_a = 2\,\mathrm{V}$ la tension minimale d'allumage :

$$u < U_a \iff \boxed{x < \left(1+\frac{r}{R_p}\right)\frac{U_a}{E} = 0{,}26}$$

2. La lampe est allumée, elle se comporte comme une résistance R_1. La puissance qu'elle reçoit vaut $\mathscr{P}_\ell = \dfrac{u^2}{R_1}$.



Pour calculer u on rassemble les résistances R_1 et xR_p en dérivation, puis on applique la loi du pont diviseur de tension :

$$R_{\text{eq}} = \frac{xR_pR_1}{xR_p+R_1} \quad \text{et} \quad u = \frac{R_{\text{eq}}}{r+(1-x)R_p+R_{\text{eq}}}E$$

On trouve enfin que $\boxed{\mathscr{P}_\ell = \left(\dfrac{R_{\text{eq}}}{r+(1-x)R_p+R_{\text{eq}}}\right)^2\dfrac{E^2}{R_1} = 1{,}5\,\mathrm{W}}$.

La puissance fournie par le générateur vaut $\mathscr{P}_g = Ei$ avec i que l'on obtient grâce à la loi des mailles :

$$i = \frac{E}{r+(1-x)R_p+R_{\text{eq}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathscr{P}_g = \frac{E^2}{r+(1-x)R_p+R_{\text{eq}}} = 10\,\mathrm{W}}$$

Le rendement énergétique vaut $\boxed{\eta = \mathscr{P}_\ell/\mathscr{P}_g = 15\,\%}$.

3. Le rendement énergétique s'écrit $\eta = \dfrac{\mathscr{P}_\ell}{\mathscr{P}_g} = \dfrac{u^2}{R_1}\times\dfrac{1}{Ei}$. Dans le cas $x=1$:

$$R_{\text{eq}} = \frac{R_1R_p}{R_1+R_p} \quad ; \quad u = \frac{R_{\text{eq}}}{r+R_{\text{eq}}}E \quad ; \quad i = \frac{E}{r+R_{\text{eq}}}$$

On exprime $1/\eta$ en fonction de R_{eq} :

$$\frac{1}{\eta} = \frac{R_1}{r+R_{\text{eq}}}\left(\frac{r+R_{\text{eq}}}{R_{\text{eq}}}\right)^2 = \frac{R_1(r+R_{\text{eq}})}{R_{\text{eq}}^2} = \frac{R_1}{R_{\text{eq}}}\left(1+\frac{r}{R_{\text{eq}}}\right)$$

En remplaçant R_{eq} par son expression on aboutit à :

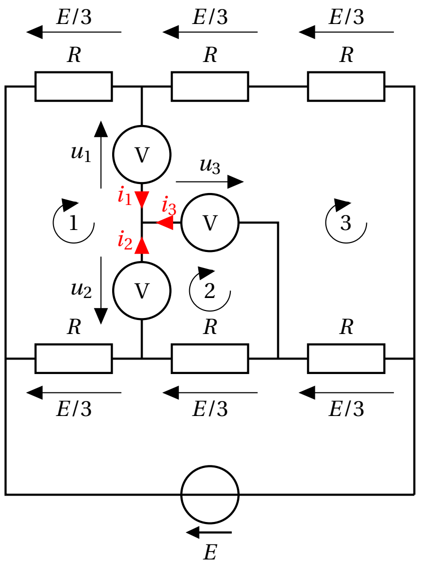
$$\frac{1}{\eta} = \left(1+\frac{R_1}{R_p}\right)\left(1+r\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_p}\right)\right) \iff \boxed{\eta = 1+\frac{2r}{R_p}+\frac{R_1}{R_p}\left(1+\frac{r}{R_p}\right)+\frac{r}{R_1}}$$

4. Le rendement énergétique est maximal lorsque la fonction $R_1 \mapsto f(R_1) = \frac{R_1}{R_p}\left(1+\frac{r}{R_p}\right)+\frac{r}{R_1}$ est minimale. On détermine la valeur de R_1 correspondante :

$$f'(R_m) = 0 \iff \frac{1}{R_p}\left(1+\frac{r}{R_p}\right) - \frac{r}{R_m^2} = 0 \iff \boxed{R_m = \sqrt{\frac{rR_p}{1+\frac{r}{R_p}}} = 4{,}8\,\Omega}$$

Le rendement énergétique est maximal lorsque $R_1 = 4{,}8\,\Omega$. Lorsque la lampe chauffe sa résistance, initialement égale à $6\,\Omega$, augmente. On s'éloigne donc du rendement maximal. **L'échauffement de la lampe contribue à diminuer le rendement énergétique**.

Exercice 2 : Énigme avec trois voltmètres



On commence par annoter le schéma (voir ci-contre). Les voltmètres sont supposés idéaux donc ils se comportent comme des interrupteurs ouverts. Cela signifie que les trois résistors "du haut" sont en série et les trois résistors "du bas" également. Avec la loi du pont diviseur de tension on conclut que la tension aux bornes de chaque résistor est égale à $E/3$.

On applique la loi des mailles dans les mailles numérotées 1 et 3 :

$$\text{maille 1 : } u_1 = u_2 \quad (1)$$

$$\text{maille 3 : } u_1 = u_3 + \frac{E}{3} \quad (2)$$

On exploite le fait que les voltmètres ont des résistances d'entrée identiques (on les note r). On applique la loi des nœuds au niveau de la connexion entre les trois voltmètres :

$$i_1+i_2+i_3 = 0 \iff \frac{u_1}{r}+\frac{u_2}{r}+\frac{u_3}{r} = 0 \iff u_1+u_2+u_3 = 0 \quad (3)$$

La résolution du système d'équations $\{(1),(2),(3)\}$ conduit finalement à :

$$\boxed{u_1 = u_2 = \frac{E}{9}} \quad \text{et} \quad \boxed{u_3 = -\frac{2E}{9}}$$