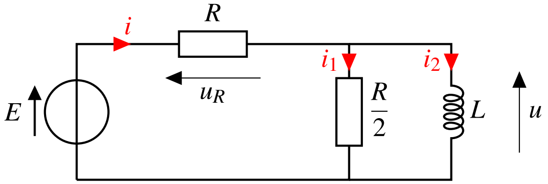
Corrigé DM7

Exercice : Circuit R, L

1. On représente le schéma du circuit pour $t>0$ et on l'annote.



Si vous avez cherché à établir l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$, vous avez sans doute rencontré des difficultés. C'est normal ! Je vais vous expliquer pourquoi c'est piégeux et comment on peut faire pour y arriver (voir au dos de la feuille). Cela dit il y a une autre manière, plus simple, d'arriver à nos fins. Il s'agit de calculer dans un premier temps l'intensité $i_2(t)$ puis d'utiliser la loi de la bobine : $u(t) = L\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$ pour conclure. Comme on va le voir, trouver et résoudre l'équation différentielle vérifiée par $i_2(t)$ est beaucoup plus simple que de le faire directement pour $u(t)$.

On commence par écrire la loi des nœuds : $i = i_1 + i_2$. On cherche ensuite à exprimer i et i_1 en fonction de i_2 en tirant sur le fil :

- loi de la bobine : $u = L\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$;
- loi d'Ohm pour $R/2$: $i_1 = \frac{2u}{R} = \frac{2L}{R}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$;
- loi des mailles : $u_R = E - u = E - L\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$;
- loi d'Ohm pour R : $i = \frac{u_R}{R} = \frac{E}{R} - \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$.

On réinjecte les expressions de i et i_1 dans la loi des nœuds :

$$\frac{E}{R} - \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = \frac{2L}{R}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + i_2 \iff \frac{3L}{R}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + i_2 = \frac{E}{R} \iff \boxed{\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{3L}i_2 = \frac{E}{3L}}$$

On identifie le temps caractéristique de ce circuit : $\boxed{\tau = \frac{3L}{R}}$. On résout cette équation différentielle :

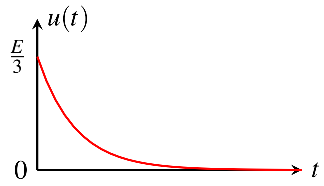
- On exprime la solution particulière en résolvant l'équation sans dérivée : $\frac{R}{3L}i_p = \frac{E}{3L} \iff i_p = \frac{E}{R}$. La solution générale s'écrit donc sous la forme : $i_2(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{E}{R}$;
- On détermine la condition initiale. L'interrupteur est ouvert depuis longtemps donc $i_2(0^-) = 0$. L'intensité dans la branche d'une bobine est continue donc $i_2(0^+) = i_2(0^-) = 0$. On en déduit l'expression de la constante d'intégration A :

$$i_2(0^+) = 0 = A + \frac{E}{R} \implies A = -\frac{E}{R}$$

On conclut que :

$$i_2(t) = \frac{E}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right) \implies \boxed{u(t) = L\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = \frac{LE}{R\tau}\mathrm{e}^{-t/\tau} = \frac{E}{3}\mathrm{e}^{-t/\tau}}$$

On trace le graphe de $u(t)$.



2. D'après le résultat de la question précédente : $u(0^+) = E/3$. On détermine t_0 :

$$u(t_0) = \frac{u(0^+)}{10} \iff \frac{E}{3}\mathrm{e}^{-t_0/\tau} = \frac{E}{30}$$
$$\iff \mathrm{e}^{t_0/\tau} = 10$$
$$\iff \boxed{t_0 = \tau\ln 10 = \frac{3L}{R}\ln 10}$$

3. On détermine numériquement l'inductance : $\boxed{L = \frac{Rt_0}{3\ln 10} = 4{,}3\,\mathrm{mH}}$.

On souhaite déterminer directement l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$. On commence par écrire la loi des mailles : $E = u + u_R$. On cherche ensuite à exprimer u_R en fonction de u en tirant sur le fil :

- loi d'Ohm pour le résistance $\frac{R}{2}$: $i_1 = \frac{2u}{R}$;
- loi de la bobine : $\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = \frac{u}{L}$. Cette loi ne nous permet pas d'exprimer i_2 mais plutôt sa dérivée temporelle $\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$, voilà qui est embêtant ! Continuons tout même le raisonnement.
- loi des nœuds : $i = i_1 + i_2$. Comme nous n'avons pas accès à i_2 mais plutôt sa dérivée, écrivons plutôt : $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{R}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{L}$.
- loi d'Ohm pour R : $u_R = Ri$. Là encore on dérive : $\frac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}u$.

Au final nous n'avons pas pu exprimer u_R en fonction de u, mais plutôt sa dérivée temporelle $\frac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t}$. Ainsi, pour conclure, nous n'utiliserons pas la loi des mailles telle quelle mais plutôt sa dérivée temporelle :

$$E = u + u_R \xrightarrow{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}} 0 = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + 2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}u \iff \boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{3L}u = 0}$$

<u>Remarque</u> : La tension E est constante, c'est pourquoi sa dérivée temporelle est nulle.

<u>Remarque</u> : Il peut arriver qu'en "tirant sur le fil" vous n'ayez pas d'autre choix que d'exprimer la dérivée temporelle d'une grandeur et non la grandeur elle-même. Si cela arrive vous pouvez malgré tout poursuivre le calcul, quitte à dériver par rapport au temps lorsque c'est nécessaire, comme on l'a fait ci-dessus.

On ne va pas s'arrêter en si bon chemin. Il s'agit maintenant de résoudre cette équation différentielle et vérifier que le résultat est bien identique à celui obtenu par l'autre méthode.

Il n'y a pas de solution particulière car l'équation n'a pas de second membre. La solution générale s'écrit donc sous la forme : $u(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau}$.

On détermine la condition initiale. On a montré précédemment que $i_2(0^+) = i_2(0^-) = 0$. D'après la loi des nœuds : $i(0^+) = i_1(0^+)$. On applique la loi des mailles (maille de "gauche") :

$$E = Ri(0^+) + \frac{R}{2}i_1(0^+) = \frac{3R}{2}i(0^+) \implies i(0^+) = i_1(0^+) = \frac{2E}{3R}$$

On applique la loi d'Ohm pour $\frac{R}{2}$: $u(0^+) = \frac{R}{2}i_1(0^+) = \frac{E}{3}$. Cette condition initiale permet de déterminer la constante d'intégration : $A = \frac{E}{3}$. On conclut que :

$$\boxed{u(t) = \frac{E}{3}\mathrm{e}^{-t/\tau}} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{3L}{R}$$

Les résultats obtenus par les deux méthodes sont cohérents, ouf !