CHAPITRE 7 Cinématique

La mécanique est le domaine de la physique qui s'intéresse aux mouvements des corps. Nous abordons ici la mécanique dite "classique", celle qui traite du mouvement de systèmes macroscopiques se déplaçant à des vitesses faibles devant la vitesse limite c (la mécanique des systèmes microscopiques relève du cadre de la physique quantique tandis que la mécanique des hautes vitesses (ou, ce qui est équivalent, des hautes énergies) relève du cadre de la relativité restreinte).

La mécanique repose sur deux concepts fondamentaux : l'espace et le temps, avec lesquels on construit la notion de *trajectoire*, c'est-à-dire la relation mathématique entre la position d'un corps dans l'espace et sa position dans le temps. La mécanique, qui utilise un cadre théorique fondé sur des lois et des outils mathématiques, a deux fonctions complémentaires :

- Une fonction **descriptive**, c'est-à-dire la traduction en termes mathématiques du mouvements des corps. Ce domaine de la mécanique est appelé la *cinématique*. Celle-ci formalise les mouvements en termes de translation, rotation, glissement, déformation, etc. Elle utilise des grandeurs comme la position, la vitesse ou l'accélération. C'est ce dont nous allons parler dans ce chapitre.
- Une fonction **explicative** et **prédictive**. Les lois de la mécanique, utilisant des concepts comme la quantité de mouvement, les forces d'interaction ou encore l'énergie, traite des causes du mouvement et forment un ensemble de règles qui rendent compte des observations et permettent d'anticiper les évolutions futures. Nous verrons certaines de ces lois dans les chapitres suivants.

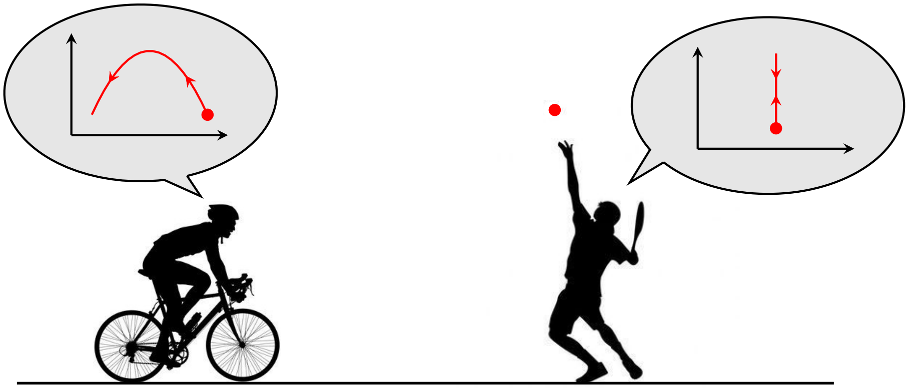
1 Repérage d'un point dans l'espace et le temps

1.1 Référentiel

Un mouvement n'est pas absolu mais **relatif à un observateur**. Si A est un corps en mouvement et si B et C sont deux observateurs mobiles l'un par rapport à l'autre alors chacun verra une trajectoire différente pour A. Ainsi l'étude d'un mouvement suppose que l'on définisse en premier lieu par rapport à quel observateur il est mesuré.

Référentiel

Un référentiel est un solide utilisé comme référence pour l'étude d'un mouvement. Il peut être un objet concret (le référentiel *terrestre* est lié à la Terre) ou bien être une abstraction (le référentiel *géocentrique* est lié à un trièdre imaginaire dont l'origine est au centre d'inertie de la Terre et dont les axes sont dirigés vers des étoiles lointaines).



Par exemple sur la figure ci-dessus la balle de tennis a une trajectoire rectiligne dans le référentiel terrestre et parabolique dans le référentiel lié à un vélo roulant en ligne droite à vitesse constante sur la route.

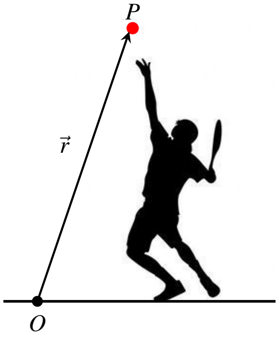
1.2 Repère

1.2.1 Origine, vecteur position

Dans ce chapitre on se limite à l'étude du mouvement d'un **point**, noté P. Sa position dans un référentiel $\mathscr{R}$ donné est mesurée par rapport à un point de référence, fixe dans $\mathscr{R}$, noté O et appelé **origine**. En termes mathématiques la position de P est définie par le vecteur :

$$\boxed{\vec{r} = \overrightarrow{OP}}$$

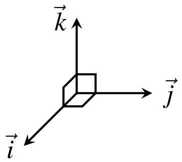
Sur la figure ci-contre on montre un exemple de vecteur position de la balle, mesuré dans le référentiel terrestre.



1.2.2 Base orthonormée directe

Base orthonormée

Une base orthonormée est une famille de vecteurs orthogonaux deux à deux et dont la norme, sans dimension, est égale à 1. On montre sur la figure ci-contre un exemple de base orthonormée $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de dimension 3 $\left(\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1\right)$.



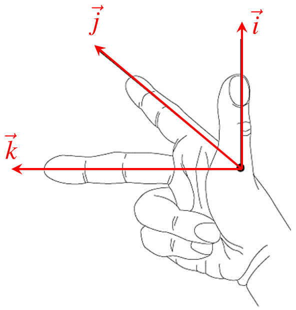
On utilise généralement une base de dimension 1 pour étudier un mouvement rectiligne, une base de dimension 2 pour un mouvement plan et une base de dimension 3 pour un mouvement tridimensionnel quelconque.

Dans une base orthonormée de dimension 3 l'ordre des vecteurs a une importance. Ainsi les bases $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et $(\vec{i},\vec{k},\vec{j})$ ne sont pas les mêmes. On classe les bases orthonormées de dimension 3 en deux catégories : les bases *directes* et le bases *indirectes*.

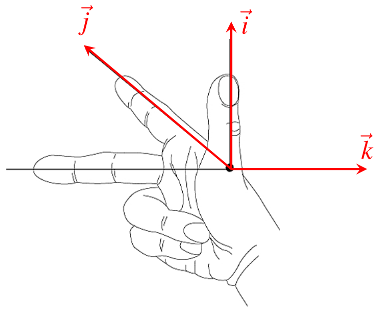
Base directe, règle des trois doigts de la main droite

Pour déterminer si une base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est directe ou indirecte on utilise la règle des trois doigts de la main **droite**. On indique la direction de $\vec{i}$ avec le pouce et celle de $\vec{j}$ avec l'index :

- si le majeur est dans le sens de $\vec{k}$ alors la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est directe.
- si le majeur est dans le sens contraire de $\vec{k}$ alors la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est indirecte.



Exemple de base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ directe



Exemple de base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ indirecte

La notion de base directe ou indirecte n'a pas de sens pour des bases de dimension 1 ou 2. En mécanique on choisit par convention de travailler **uniquement avec des bases directes**.

1.2.3 Projection, coordonnées

Coordonnées d'un vecteur dans une base

Tout vecteur $\vec{A}$ s'écrit de manière **unique** en fonction des vecteurs $\mathscr{B} = (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ d'une base orthonormée directe :

$$\vec{A} = A_i\vec{i} + A_j\vec{j} + A_k\vec{k}$$

Les nombres A_i, A_j et A_k sont appelés les **coordonnées** de $\vec{A}$ dans la base $\mathscr{B}$. On utilise parfois les notations suivantes :

$$\vec{A} = \left| \begin{array}{l} A_i \\ A_j \\ A_k \end{array} \right. \qquad \text{ou} \qquad \vec{A} = \begin{pmatrix} A_i \\ A_j \\ A_k \end{pmatrix}$$

Projection d'un vecteur dans une base

On appelle **projection** l'opération qui consiste à déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{A}$ dans une base orthonormée directe $\mathscr{B}$ donnée.

$$\vec{A} \xrightarrow[\text{projection de } \vec{A} \text{ dans la base } \mathscr{B}]{} (A_i, A_j, A_k)$$

En termes mathématiques une projection s'effectue avec des **produits scalaires** :

$$A_i = \vec{A} \cdot \vec{i} \quad , \quad A_j = \vec{A} \cdot \vec{j} \quad , \quad A_k = \vec{A} \cdot \vec{k}$$

1.2.4 Repère

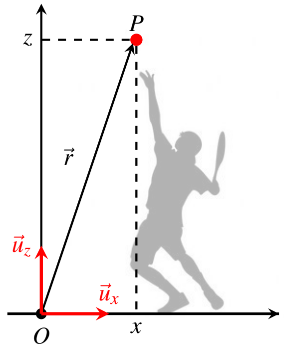
Coordonnées d'un vecteur dans une base

Un repère est un objet mathématique constitué :

- d'une origine O fixe dans le référentiel d'étude,
- d'une base orthonormée directe.

Un repère permet notamment de définir les **coordonnées de position** d'un point P, qui sont les coordonnées du vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ dans la base d'étude. On illustre sur la figure ci-contre comment obtenir géométriquement ces coordonnées dans le cas d'un repère cartésien de dimension 2.

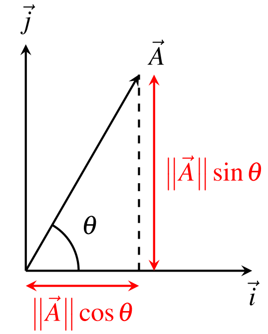
$$\vec{r} = x\vec{u}_x + z\vec{u}_z = \left| \begin{array}{l} x \\ z \end{array} \right.$$



1.3 Calculs de projection

Une situation très fréquente consiste à projeter un vecteur qui est incliné d'un certain angle par rapport aux vecteurs d'une base de dimension 2.

Sur l'exemple ci-contre l'objectif consiste à utiliser des relations de trigonométrie pour déterminer les coordonnées de $\vec{A}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ en fonction de l'angle θ. On s'appuie notamment sur la définition du cosinus et du sinus dans un triangle rectangle bien choisi.



En résumé

• Déterminer le signe des deux coordonnées ;

• Exprimer chaque coordonnée en fonction de $\cos\theta$ ou $\sin\theta$ en utilisant un triangle rectangle bien choisi (ne surtout pas oublier la **norme** du vecteur quand on calcule les projections).

Exemple

Dans chacune des quatre figures ci-dessous projeter le vecteur $\vec{A}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$ en fonction de θ et $A = \|\vec{A}\|$.

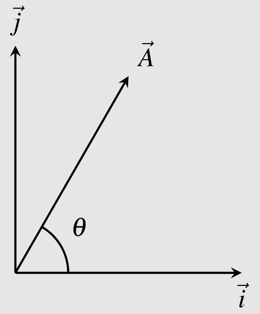


Figure 1

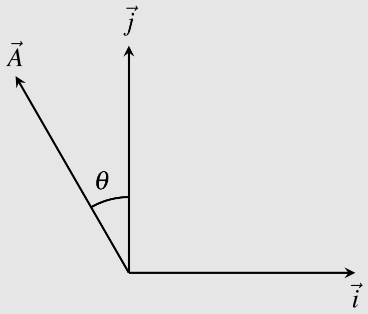


Figure 2

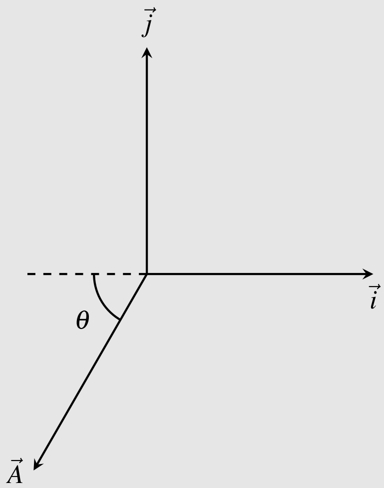


Figure 3

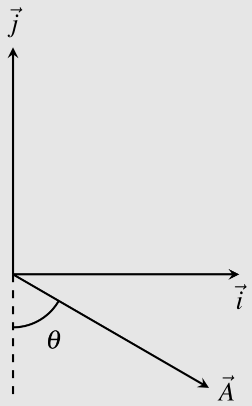


Figure 4

Figure 1 : Le vecteur $\vec{A}$ s'obtient par un déplacement dans le sens de $\vec{i}$ et un déplacement dans le sens de $\vec{j}$. Les deux coordonnées sont positives.

$$\boxed{\vec{A} = A\left(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}\right)}$$

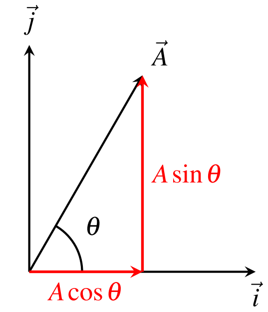


Figure 2 : Le vecteur $\vec{A}$ s'obtient par un déplacement dans le sens contraire de $\vec{i}$ et un déplacement dans le sens de $\vec{j}$. La coordonnée sur $\vec{i}$ est négative et celle sur $\vec{j}$ est positive.

$$\boxed{\vec{A} = A\left(-\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}\right)}$$

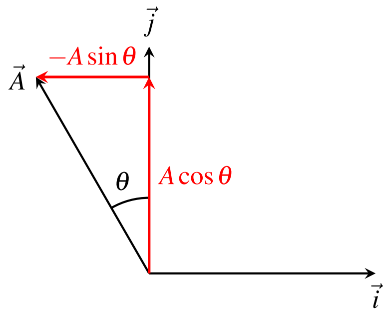


Figure 3 : Le vecteur $\vec{A}$ s'obtient par un déplacement dans le sens contraire de $\vec{i}$ et un déplacement dans le sens contraire de $\vec{j}$. Les deux coordonnées sont négatives.

$$\boxed{\vec{A} = A\left(-\cos\theta\,\vec{i} - \sin\theta\,\vec{j}\right)}$$

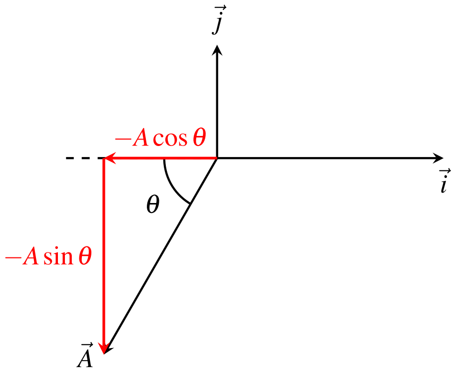
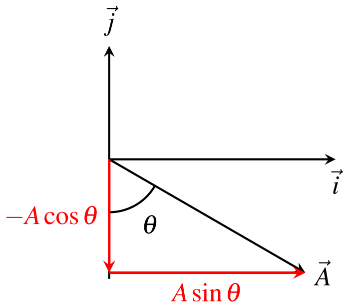


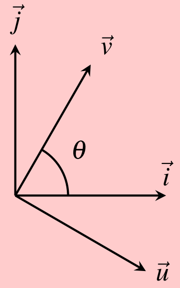
Figure 4 : Le vecteur $\vec{A}$ s'obtient par un déplacement dans le sens de $\vec{i}$ et un déplacement dans le sens contraire de $\vec{j}$. La coordonnées sur $\vec{i}$ est positive et celle sur $\vec{j}$ est négative :

$$\boxed{\vec{A} = A\left(\sin\theta\,\vec{i} - \cos\theta\,\vec{j}\right)}$$



Application 1

On considère deux bases orthonormées $(\vec{u},\vec{v})$ et $(\vec{i},\vec{j})$. Projeter les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$ puis les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dans la base $(\vec{u},\vec{v})$.



1.4 Vitesse

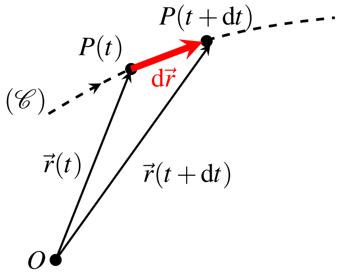
Pour repérer un point P dans le temps on utilise une coordonnée notée t qui désigne un instant précis. Comme pour la position dans l'espace, la position dans le temps est mesurée par rapport à une origine choisie arbitrairement (l'instant initial) ; on peut dès lors interpréter t comme la durée qui sépare l'instant initial pour lequel, par définition, $t = 0$, de l'instant étudié.

Un point P en mouvement est caractérisé par un vecteur position qui varie au cours du temps et que l'on peut interpréter comme **une fonction du temps** : $\vec{r}(t)$. Le vecteur vitesse d'un corps mesure le changement de son vecteur position au cours du temps.

1.4.1 Vecteur déplacement élémentaire

On considère le déplacement d'un point P sur une trajectoire donnée $(\mathscr{C})$, entre deux dates infiniment proches t et $t+\mathrm{d}t$. On appelle vecteur déplacement élémentaire la variation infinitésimale du vecteur position au cours de cet intervalle de temps :

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{r} = \vec{r}(t+\mathrm{d}t) - \vec{r}(t)}$$



1.4.2 Vecteur vitesse instantané

La vitesse instantanée mesure le taux de variation du vecteur position au cours d'un intervalle de temps infinitésimal :

$$\boxed{\vec{v}(t) = \frac{\vec{r}(t+\mathrm{d}t) - \vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}}$$

En terme mathématiques nous admettons que cela est équivalent à dire que le vecteur vitesse instantané est égal à **la dérivée temporelle du vecteur position**, vu comme une fonction du temps $\vec{r}(t)$.

Remarque : Le déplacement élémentaire mesuré entre t et $t+\mathrm{d}t$ permet de définir le vecteur vitesse instantané $\vec{v}(t)$ **à l'instant** t. Ce dernier est donc lui-même considéré comme une fonction du temps.

Remarque : Le vecteur vitesse et le vecteur déplacement élémentaire sont proportionnels l'un à l'autre donc colinéaires : $\mathrm{d}\vec{r} = \vec{v}\mathrm{d}t$. À tout instant le vecteur vitesse est donc **tangent à la trajectoire**.

Remarque : Il faut être vigilant avec le terme "vitesse" qui désigne dans le langage courant **la norme** $\|\vec{v}\|$ du vecteur vitesse, mais que l'on emploie également pour désigner le vecteur vitesse $\vec{v}$ lui-même. Par précaution il est conseillé de parler de *vecteur vitesse* dans un cas et de *vitesse en norme* dans l'autre pour éviter toute confusion.

Mouvement uniforme

Un mouvement est dit uniforme si et seulement si **la vitesse en norme est constante**.

⚠ Il est tout à fait possible que le vecteur vitesse change au cours d'un mouvement uniforme (sa norme se conserve mais sa **direction** peut varier). C'est le cas par exemple d'un mouvement circulaire uniforme.

1.5 Accélération

On considère à nouveau le déplacement d'un point P sur une trajectoire donnée $(\mathscr{C})$, entre deux dates infiniment proches t et $t+\mathrm{d}t$. La variation infinitésimale du vecteur vitesse sur cet intervalle de temps s'écrit : $\mathrm{d}\vec{v} = \vec{v}(t+\mathrm{d}t) - \vec{v}(t)$. Le vecteur accélération mesure le taux de variation du vecteur vitesse sur cet intervalle de temps :

$$\boxed{\vec{a}(t) = \frac{\vec{v}(t+\mathrm{d}t) - \vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}}$$

Là encore on peut voir $\vec{a}$ comme la dérivée temporelle du vecteur vitesse $\vec{v}(t)$. Cette relation définit l'accélération $\vec{a}(t)$ **à l'instant** t.

Mouvement rectiligne uniforme

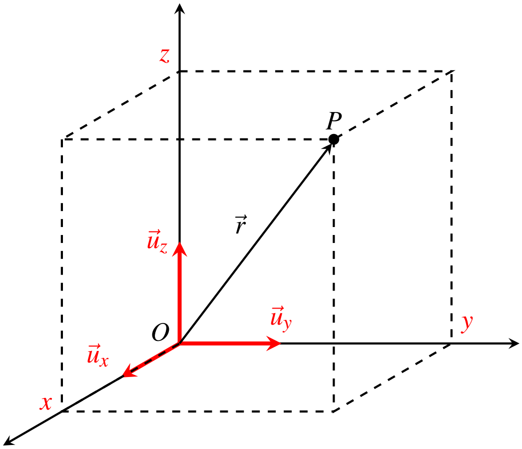
Un point est immobile ou en mouvement rectiligne uniforme si et seulement si **son vecteur accélération est nul**.

⚠ Si le mouvement est uniforme mais non rectiligne alors la direction du vecteur vitesse change au cours du temps donc le vecteur accélération n'est pas nul !

2 Systèmes de coordonnées

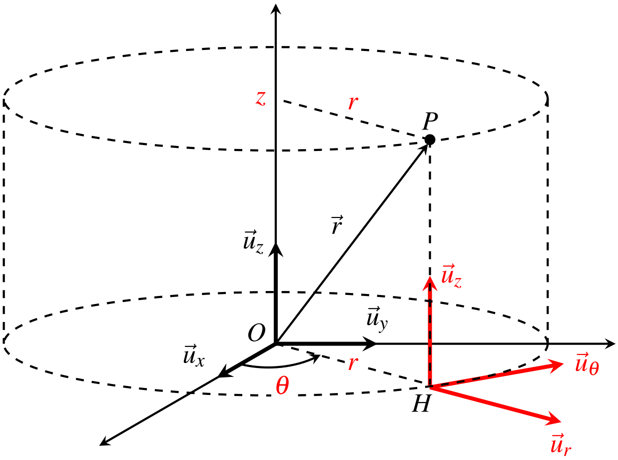
On a vu qu'un repère permet de définir les coordonnées de position d'un point P en mouvement. La définition de la base orthonormée (et donc des coordonnées) n'est pas unique ; il existe plusieurs possibilités (base cartésienne, cylindro-polaire, sphérique, de Frenet, etc). On choisit généralement la base d'étude en fonction du mouvement étudié, dans la mesure où celle-si simplifie les calculs.

2.1 Coordonnées cartésiennes



Position	$\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$
Vitesse	$\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_x + \dot{z}\vec{u}_z$
Accélération	$\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_x + \ddot{z}\vec{u}_z$
Déplacement élémentaire	$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\vec{u}_x + \mathrm{d}y\vec{u}_x + \mathrm{d}z\vec{u}_z$

2.2 Coordonnées cylindriques (ou cylindro-polaires)



Position	$\vec{r} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$
Vitesse	$\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_x + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$
Accélération	$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z$
Déplacement élémentaire	$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}r\vec{u}_r + r\mathrm{d}\theta\vec{u}_\theta + \mathrm{d}z\vec{u}_z$

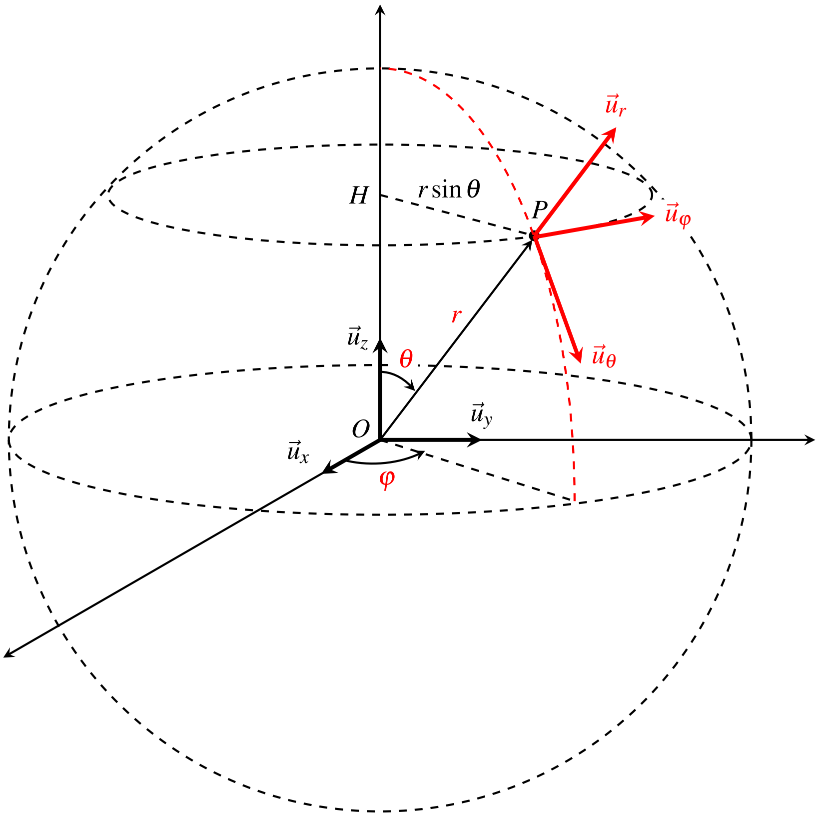
Dérivée des vecteurs mobiles de la base cylindrique

On ne détaille pas le calcul des vecteurs vitesse et accélération. L'essentiel est de savoir les retrouver rapidement en dérivant deux fois successivement le vecteur position. Pour cela il est notamment important de retenir par cœur l'expression des dérivées des vecteurs mobiles de la base cylindrique :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{u}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\vec{u}_r}$$

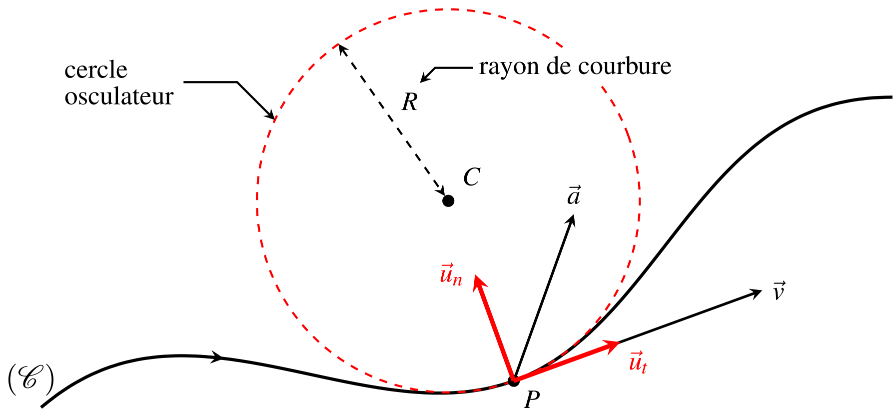
avec $\dot{\theta}$ la vitesse angulaire du point P (en $\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$).

2.3 Coordonnées sphériques



Position	$\vec{r} = r\vec{u}_r$

2.4 Base de Frenet



Vitesse	$\vec{v} = \|\|\vec{v}\|\|\vec{u}_t$
Accélération	$\vec{a} = \frac{\|\|\vec{v}\|\|^2}{R}\vec{u}_n + \frac{\mathrm{d}\|\|\vec{v}\|\|}{\mathrm{d}t}\vec{u}_t$

3 Utilisation d'un système de coordonnées

On montre dans cette partie, sur différents exemples, comment exploiter une trajectoire fournie pour analyser les propriétés d'un mouvement.

3.1 Coordonnées cartésiennes

3.1.1 Le cas le plus simple : mouvement rectiligne

Exemple

Une voiture, assimilée ici à un objet ponctuel P, se déplace en ligne droite. Son mouvement est repéré par un axe (Ox) horizontal ; sur cet axe la trajectoire de la voiture est décrite par $x(t) = -2t^2 + 30t - 20$ (avec x exprimée en m et t en s). On étudie le mouvement à partir de $t = 0$.

1. Exprimer à tout instant le vecteur position, le vecteur vitesse et le vecteur accélération de la voiture. Comment pourrait-on qualifier ce mouvement ?

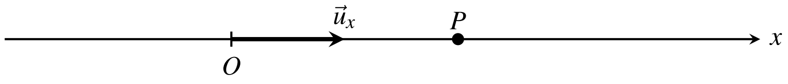
2. À la date $t = 0$ où se trouve la voiture, dans quel sens se déplace-t-elle et quelle est sa vitesse en norme ?

3. À quelle date t_f la voiture est-elle à l'arrêt ?

4. Quelle distance la voiture a-t-elle parcourue entre $t = 0$ et $t = t_f$?

► Représenter schématiquement la situation

Le schéma peut sembler ici superflu mais il permet de se faire une représentation du mouvement, ce qui facilite l'analyse. Il permet également de représenter le vecteur de base $\vec{u}_x$ (il n'y en a qu'un car le mouvement est rectiligne). Pour les mouvements à deux dimensions ou plus le schéma est très utile pour **calculer des projections**.



► Exprimer un vecteur position, vitesse, accélération

1. Le mouvement est repéré dans une base **cartésienne de dimension 1** : le vecteur position s'écrit :

$$\boxed{\vec{r} = x\vec{u}_x = \left(-2t^2 + 30t - 20\right)\vec{u}_x}$$

On dérive deux fois de suite le vecteur position pour obtenir le vecteur vitesse et le vecteur accélération de la voiture :

$$\begin{cases} \vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x \implies \boxed{\vec{v} = (-4t + 30)\,\vec{u}_x} \\ \vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x \implies \boxed{\vec{a} = -4\vec{u}_x} \end{cases}$$

On remarque que le vecteur accélération est indépendant du temps (car le vecteur $\vec{u}_x$ est un **vecteur fixe**) donc le mouvement de la voiture est **uniformément accéléré**.

► Manipuler les coordonnées

2. La position de la voiture est donnée par sa coordonnée x. À la date $t = 0$ elle se trouve en $\boxed{x(0) = -20\,\mathrm{m}}$. On n'oublie surtout pas de donner le résultat numérique avec son **unité**.

À cette date la coordonnée du vecteur vitesse s'écrit $\dot{x}(0) = 30\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Elle est positive ce qui signifie que **le véhicule se déplace dans le sens des *x* croissants** (le vecteur vitesse est orienté dans le sens de $\vec{u}_x$).

Norme d'un vecteur

La norme d'un vecteur $\vec{A}$ quelconque est définie par $\|\vec{A}\| = \sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}}$. Si les coordonnées de $\vec{A}$ dans une base orthonormée $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ s'écrivent (A_i, A_j, A_k) alors :

$$\boxed{\|\vec{A}\| = \sqrt{A_i^2 + A_j^2 + A_k^2}}$$

Cette expression se généralise à n'importe quelle dimension (notamment 1 et 2).

Dans le cas présent le vecteur vitesse s'écrit $\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x$ donc sa norme vaut :

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\dot{x}^2} = |\dot{x}| = |-4t+30|$$

À la date $t = 0$ elle vaut $\boxed{\|\vec{v}(0)\| = 30\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$.

3. La voiture est à l'arrêt si la vitesse s'annule, autrement dit si $\dot{x} = 0$. On résout l'équation suivante :

$$\dot{x}(t_f) = 0 \iff -4t_f + 30 = 0 \iff \boxed{t_f = \frac{30}{4} = 7{,}5\,\mathrm{s}}$$

4. La position finale est donnée par la coordonnée $x(t_f)$ et la position initiale par $x(0)$. La distance totale parcourue est donc égale à $L = |x(t_f) - x(0)|$ (la valeur absolue permet de prendre en compte le cas où le véhicule irait dans le sens des x décroissants, on aurait alors $x(t_f) < x(0)$). Avec la valeur de t_f obtenue à la question précédente on peut faire l'application numérique :

$$L = |x(t_f) - x(0)| = |-2t_f^2 + 30t_f| \iff \boxed{L = 112{,}5\,\mathrm{m}}$$

Application 2

Deux voitures circulent sur la même route rectiligne et se suivent en roulant à la même vitesse. À la date $t = 0$ la voiture de devant (notée avec l'indice 1) voit un danger et freine brutalement. La seconde (notée avec l'indice 2), après un temps de réaction d'une seconde, se met également à freiner. On repère le mouvement de deux voitures sur un axe (Ox) dont l'origine est prise au niveau de la voiture 2 à la date $t = 0$. Les trajectoires des deux véhicules sont décrites par les coordonnées suivantes :

$$x_1(t) = -3t^2 + 25t + 50 \quad \text{et} \quad x_2(t) = \begin{cases} 25t & t \leq 1\,\mathrm{s} \\ -2t^2 + 29t - 2 & t \geq 1\,\mathrm{s} \end{cases}$$

avec x_1, x_2 exprimées en m et t exprimée en s.

1. Exprimer à tout instant le vecteur position, le vecteur vitesse et le vecteur accélération des deux voitures. Pour la voiture 2 on donnera à chaque fois l'expression pour $t \leq 1\,\mathrm{s}$ et pour $t \geq 1\,\mathrm{s}$. Comment qualifier le mouvement de la voiture 2 pour $t \leq 1\,\mathrm{s}$? $t \geq 1\,\mathrm{s}$?

2. Laquelle des deux voitures freine le plus brutalement après $t = 1\,\mathrm{s}$? Justifier.

3. Vérifier que la position et la vitesse de la voiture 2 sont continues en $t = 1\,\mathrm{s}$.

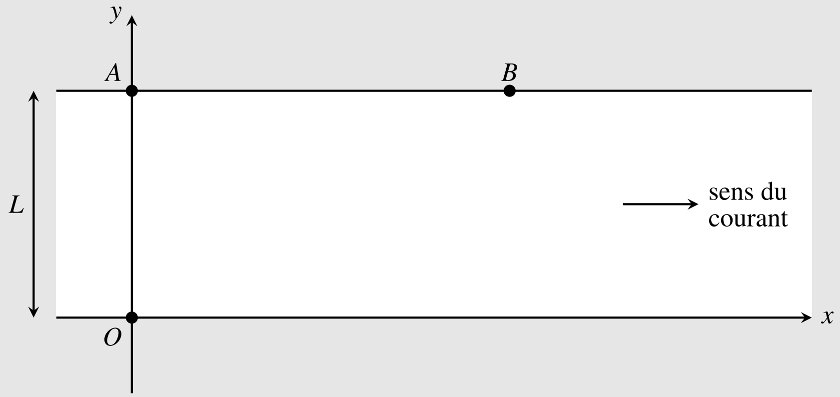
4. Avant que la première voiture ne commence à freiner, à quelle vitesse roulaient les deux véhicules et quelle distance les séparaient ?

5. Les deux voitures entrent-elles en collision avant de s'arrêter ? Justifier.

3.1.2 Mouvement à deux dimensions

Exemple

Une personne utilise un radeau pour traverser une rivière de largeur $L = 50\,\mathrm{m}$. Elle part d'un point O situé sur l'une des rives et rame en direction du point A situé juste en face sur l'autre rive. À cause du courant le radeau dérive le long de la rivière et finit par arriver au point B, situé en aval de A. On repère le mouvement du radeau, assimilé à un point matériel, dans un repère cartésien (Oxy).



Le radeau commence son mouvement à la date $t = 0$. Sa trajectoire est décrite par les coordonnées suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = 2t \\ y(t) = 0,8t \end{cases}$$

avec x, y exprimées en m et t exprimée en s.

1. Exprimer à tout instant le vecteur position, le vecteur vitesse et le vecteur accélération du radeau.

2. À quelle vitesse le radeau se déplace-t-il perpendiculairement à la rivière ? À quelle vitesse dérive-t-il le long de la rivière ? Calculer la vitesse du radeau en norme.

3. Déterminer l'équation cartésienne $y(x)$ de la trajectoire. Tracer son allure.

4. Combien de temps dure la traversée ? Quelle distance le radeau a-t-il parcouru ?

5. Calculer l'angle α entre la trajectoire du radeau et l'axe $(\mathrm{O}y)$.

Les méthodes mises en œuvres sont exactement les mêmes que dans la sous-partie précédente, le schéma étant en plus déjà tracé dans l'énoncé. On les adapte au cas d'un mouvement 2D.

1. On utilise les relations vues en cours pour les coordonnées cartésiennes :

$$\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y \implies \boxed{\vec{r} = 2t\vec{u}_x + 0,8t\vec{u}_y} \quad ; \quad \vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y \implies \boxed{\vec{v} = 2\vec{u}_x + 0,8\vec{u}_y}$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y \implies \boxed{\vec{a} = \vec{0}}$$

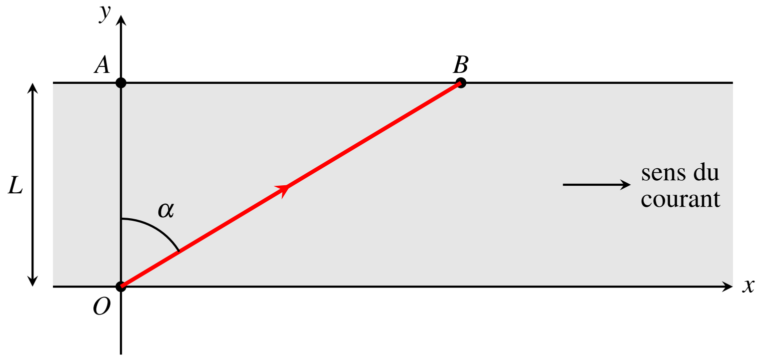
2. La composante du vecteur vitesse dans la direction perpendiculaire à la rivière est $\dot{y}(t)$; elle est constante et égale à $\boxed{0,8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$.
La composante du vecteur vitesse dans la direction de la rivière est $\dot{x}(t)$; elle est constante et égale à $\boxed{2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$.

La norme de la vitesse du radeau vaut $\boxed{\|\vec{v}\| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 2,2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$.

3. En divisant les deux équation horaires (pour éliminer le temps t) on trouve immédiatement :

$$\frac{y}{x} = 0,4 \iff \boxed{y = 0,4x}$$

La trajectoire du radeau est **rectiligne**.



4. La traversée commence à $t = 0$ et se termine lorsque le radeau a atteint l'autre rive, c'est-à-dire lorsque $y = L$. On doit donc résoudre l'équation :

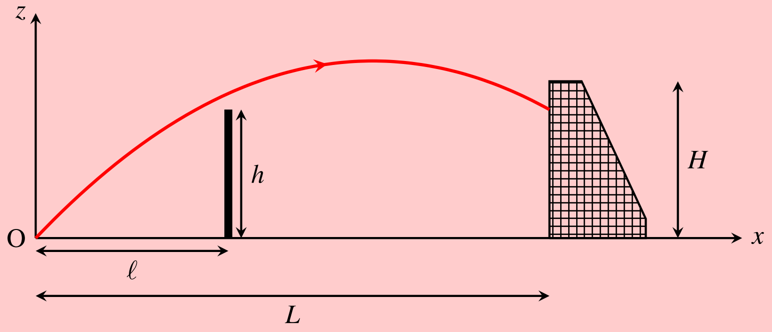
$$y(t_B) = L \iff \boxed{t_B = \frac{50}{0,8} = 63\,\mathrm{s}}$$

Le radeau avance à la vitesse constante $\|\vec{v}\|$ et met un temps t_B pour traverser la rivière. La distance totale parcourue vaut $\boxed{D = \|\vec{v}\|\,t_B = 135\,\mathrm{m}}$.

5. On voit sur le schéma que $\cos\alpha = \frac{L}{D}$ d'où $\boxed{\alpha = \arccos\left(\frac{L}{D}\right) = 68°}$.

Application 3

Un joueur de football s'entraîne à tirer des coups-francs. Un "mur" de hauteur $h = 2\,\mathrm{m}$ est placé à une distance $\ell = 9,15\,\mathrm{m}$ du ballon tandis que la cage, de hauteur $H = 2,44\,\mathrm{m}$, se situe à $L = 25\,\mathrm{m}$ du ballon. On suppose que la trajectoire du ballon est contenue dans un plan vertical (le tir n'est pas "brossé") et on néglige les frottements de l'air. On néglige la taille du ballon que l'on assimile à un point matériel. On utilise un repère cartésien (Oxz) dont l'origine est placée à l'endroit du coup-franc et on représente ci-dessous l'allure d'une trajectoire "souhaitable".



La trajectoire du ballon, avant le premier rebond, est décrite par :

$$\begin{cases} x(t) = 22t \\ z(t) = -5t^2 + 7t \end{cases}$$

avec x, z exprimées en m et t exprimé en s.

1. Exprimer à tout instant le vecteur position, le vecteur vitesse et le vecteur accélération du ballon.

2. Déterminer l'équation cartésienne $z(x)$ de la trajectoire.

3. À quelle condition sur la fonction $z(x)$ le ballon passe-t-il au-dessus du mur ? Est-ce le cas ici ?

4. À quelle condition sur la fonction $z(x)$ le ballon rentre-t-il dans la cage sans rebondir avant sur le sol ? Est-ce le cas ici ?

5. Calculer le temps mis par le ballon pour atteindre la cage.

6. Calculer l'altitude maximale atteinte par le ballon.

7. Calculer la vitesse en norme du ballon au moment du tir.

8. Déterminer la direction dans laquelle le ballon a été frappé. Pour cela calculer l'angle α entre l'horizontale et la trajectoire au moment du tir.
Indication : au moment du tir la trajectoire est orientée par le vecteur $\vec{v}(t=0)$.

3.2 Coordonnées cylindro-polaires

Exemple

On considère un point P en mouvement dont les coordonnées cylindriques sont, à chaque instant :

$$\begin{cases} r(t) = a_0 t^2 + r_0 \\ \theta(t) = \omega_0 t - \theta_0 \\ z(t) = -v_0 t \end{cases}$$

avec $r_0 = 1,0\,\mathrm{m}$, $a_0 = 1,0\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$, $\omega_0 = 3,0\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$, $\theta_0 = 2,0\,\mathrm{rad}$ et $v_0 = 2,0\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

1. Déterminez les composantes des vecteurs vitesse et accélération du point P dans la base cylindrique choisie.

2. Montrer que la vitesse angulaire est constante et la calculer en tours par minute.

3. Calculez la norme de la vitesse de P à la date $t = 1\,\mathrm{s}$.

4. Calculez la norme de l'accélération de P à la date $t = 0\,\mathrm{s}$.

1. Dans cet exercice il s'agit principalement de manipuler les vecteurs position, vitesse et accélération en coordonnées cylindriques. On commence par rappeler l'expression du vecteur position : $\vec{r} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$, d'où :

$$\vec{r} = (a_0 t^2 + r_0)\vec{u}_r - v_0 t \vec{u}_z$$

On dérive ce vecteur par rapport au temps pour obtenir le vecteur vitesse :

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z \implies \boxed{\vec{v} = 2a_0 t\vec{u}_r + (a_0 t^2 + r_0)\omega_0 \vec{u}_\theta - v_0 \vec{u}_z}$$

On dérive à nouveau pour obtenir le vecteur accélération :

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z \implies \boxed{\vec{a} = (2a_0 - (a_0 t^2 + r_0)\omega_0^2)\vec{u}_r + 4a_0\omega_0 t\vec{u}_\theta}$$

2. La vitesse angulaire vaut $\dot{\theta}(t) = \omega_0$, elle est bien constante. Sa valeur en unité SI est $\dot{\theta} = 3,0\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$. Comme un tour complet correspond à 2π radians la vitesse angulaire exprimée en tours par minute vaut :

$$\boxed{\dot{\theta} = \frac{60}{2\pi} \times 3,0 = 29\,\mathrm{tours \cdot min^{-1}}}$$

3. On exprime la norme du vecteur vitesse à une date t quelconque :

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{4a_0^2 t^2 + (a_0 t^2 + r_0)^2 \omega_0^2 + v_0^2}$$

On la détermine numériquement à $t = 1\,\mathrm{s}$: $\boxed{\|\vec{v}(t = 1\,\mathrm{s})\| = 6,6\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}}$.

4. On exprime la norme du vecteur accélération à une date t quelconque :

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{(2a_0 - (a_0t^2 + r_0)\omega_0^2)^2 + 16a_0^2\omega_0^2t^2}$$

On la détermine numériquement à $t = 0$: $\boxed{\|\vec{a}(t=0)\| = 7,0\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}}$.

Application 4

Une mouche est placée au centre d'un tourne-disque qui tourne à vitesse angulaire constante. Elle se déplace vers le bord en suivant un rayon du plateau. La composition du mouvement de translation sur le plateau et du mouvement de rotation du plateau par rapport au sol fait que la trajectoire de la mouche dans le référentiel terrestre a une forme de spirale. En plaçant l'origine du repère au centre du plateau les coordonnées polaires de la mouche sont :

$$\begin{cases} r(t) = \alpha t \\ \theta(t) = \beta t \end{cases}$$

Le plateau a un rayon $R = 30\,\mathrm{cm}$. On donne $\alpha = 2\,\mathrm{cm\cdot s^{-1}}$ et $\beta = 3,5\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$.

1. Les disques les plus courants sont les “33 tours” et les “45 tours”, la valeur indiquant le nombre de rotations du disque par minute. Dans le cas présent le tourne-disque est-il réglé pour lire des 33 tours ou bien des 45 tours ? Justifier.

2. Combien de temps faut-il à la mouche pour atteindre le bord du disque ? Combien de tours le disque aura-t-il effectué pendant ce laps de temps ?

3. Calculez la norme du vecteur vitesse de la mouche lorsqu'elle atteint le bord du disque.

4. Calculez la norme du vecteur accélération de la mouche lorsqu'elle atteint le bord du disque.

4 Calcul d'une trajectoire

Dans la partie précédente nous avons étudié des mouvements à partir de trajectoires fournies. Désormais on cherche à **calculer** la trajectoire avant de l'analyser.

4.1 Coordonnées cartésiennes

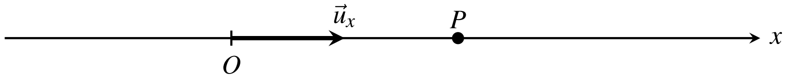
Exemple

Une voiture roule en ligne droite à la vitesse $v_0 = 80\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$. À un instant donné elle commence à freiner avec une accélération constante $-a$ (avec $a = 3\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$). Calculer la distance de freinage.

▶ Définir le repère d'étude

Dans un exercice le repère d'étude sera parfois précisé, et parfois non. Dans le cas présent il faut le définir, **en faisant un schéma clair de la situation**. L'origine des temps non plus n'est pas précisée ; il faut la définir. Notez que le choix du repère et de l'origine des temps est **arbitraire** mais qu'il y a des choix plus pratiques que d'autres pour simplifier les calculs. Ici nous choisissons :

- un repère cartésien de dimension 1 avec un axe (Ox) orienté dans la direction et le sens du déplacement de la voiture, et dont l'origine O est située à l'endroit où la voiture **commence son freinage** ;
- une origine des temps à l'instant où la voiture commence son freinage.



▶ Poser le problème en termes mathématiques

Les données du problème sont les suivantes :

- la vitesse initiale v_0 de la voiture au début du freinage,
- l'accélération pendant la phase de freinage, qui est constante.

On étudie le mouvement de la voiture pendant la phase de freinage, c'est-à-dire pour $t \geq 0$. Dans le système de coordonnées cartésiennes le vecteur accélération de la voiture est $\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x$. Il est dit que l'accélération est constante, égale à $-a$, autrement dit $\ddot{x} = -a$.

Il s'agit d'une **équation différentielle du deuxième ordre** vérifiée par la position $x(t)$ de la voiture. Pour déterminer la trajectoire il faut **intégrer** cette équation différentielle une première fois pour obtenir la coordonnée $\dot{x}(t)$ du vecteur vitesse et une deuxième fois pour déterminer la position $x(t)$ de la voiture à tout instant pendant le freinage.

▶ Intégrer une équation équation différentielle pour obtenir la trajectoire

L'équation différentielle qui nous concerne est simple car a est une constante. En intégrant une première fois on trouve :

$$\dot{x}(t) = -at + C_1$$

où C_1 est une constante d'intégration que l'on détermine grâce à une **condition initiale**. La vitesse de la voiture est égale à v_0 à l'instant initial, autrement dit :

$$\dot{x}(0) = v_0 = C_1$$

On conclut que $\dot{x}(t) = -at + v$. On intègre une deuxième fois afin d'obtenir la position :

$$x(t) = -\frac{a}{2}t^2 + v_0 t + C_2$$

avec une nouvelle constante d'intégration C_2 que l'on obtient grâce à la condition initiale suivante : par choix de notre origine des temps et origine de l'axe (Ox) la voiture se trouve en $x = 0$ à l'instant initial. On en déduit que :

$$x(0) = 0 = C_2$$

La position de la voiture pendant le freinage est donc : $\boxed{x(t) = -\frac{1}{2}at^2 + v_0 t}$.

► **Analyser la trajectoire**

Comme dans la partie précédente il s'agit maintenant d'analyser la trajectoire. La voiture s'arrête lorsque $\dot{x}(t_{\text{arrêt}}) = 0$; on détermine à quelle date cela se produit :

$$\dot{x}(t_{\text{arrêt}}) = -at_{\text{arrêt}} + v_0 = 0 \iff t_{\text{arrêt}} = \frac{v_0}{a}$$

<u>Remarque</u> : si l'on souhaite déterminer numériquement $t_{\text{arrêt}}$ en unités SI (en mètres donc) il faut exprimer la vitesse en unités SI, c'est-à-dire en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$; il y a donc une conversion à faire :

$$v_0\left[\mathrm{m \cdot s^{-1}}\right] = \frac{v_0\,[\mathrm{km/h}]}{3{,}6} = \frac{80}{3{,}6} = 22\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} \quad \text{et} \quad t_{\text{arrêt}} = \frac{v_0}{a} = 7{,}4\,\mathrm{s}$$

La position de la voiture à cet instant-là est : $x_{\text{arrêt}} = -\frac{1}{2}at_{\text{arrêt}}^2 + v_0 t_{\text{arrêt}} = \frac{v_0^2}{2a}$. La distance de freinage de la voiture vaut :

$$\boxed{D_{\text{freinage}} = \frac{v_0^2}{2a} = 82\,\mathrm{m}}$$

Application 5

Une voiture de tourisme et une formule 1 font la course sur une distance $L = 500\,\mathrm{m}$. Pour laisser une chance de victoire à la voiture celle-ci part lancée à la vitesse constante de $150\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$. La formule 1 part à l'arrêt et entame un mouvement d'accélération constante à l'instant où la voiture passe à sa hauteur. On mesure que la formule 1 atteint la vitesse de $100\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ en $2{,}5\,\mathrm{s}$.

1. Calculer l'accélération de la formule 1.

2. Qui remporte la course ?

3. Calculer la vitesse de la formule 1 à la fin de la course.

4. Quel est le temps nécessaire à la formule 1 pour rattraper la voiture ?

5. Calculer la distance parcourue quand la formule 1 rattrape la voiture.

6. Calculer la vitesse de la formule 1 quand elle rattrape la voiture.

4.2 Coordonnées cylindro-polaires

Exemple

Une particule se déplace sur un cercle de rayon $R = 10\,\text{m}$ à la vitesse angulaire constante $\omega_0 = 0,55\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$. À la date $t = 0$ elle commence à ralentir avec une accélération angulaire $-\alpha_0$ (avec $\alpha_0 = 2,1\cdot 10^{-2}\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-2}$).

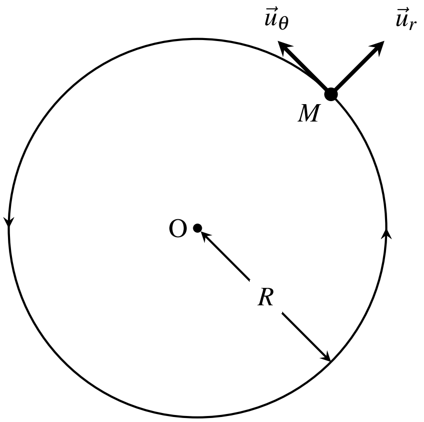
1. Pour $t < 0$, exprimer le vecteur vitesse et le vecteur accélération dans la base polaire. Calculer leur norme et faire une représentation schématique.

2. Pour $t > 0$, exprimer le vecteur vitesse et le vecteur accélération dans la base polaire. Faire une représentation schématique.

3. À quelle date la particule s'arrête-t-elle ?

4. Quelle distance aura-t-elle parcourue depuis $t = 0$?

1. On commence par faire une représentation schématique de la trajectoire et de la base polaire. On note M la position de la particule.



Pour $t < 0$ la particule se déplace sur un cercle de rayon R donc dans le système de coordonnées polaires on a $r(t) = R = \text{Cste}$. Sa vitesse angulaire est constante, autrement dit $\dot\theta = \omega_0 = \text{Cste}$. On exprime le vecteur position dans la base polaire :

$$\vec{r} = R\vec{u}_r$$

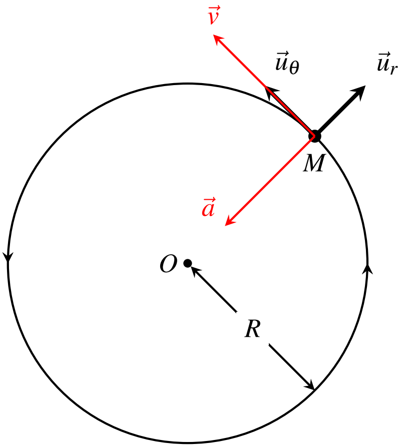
On le dérive une première fois pour avoir le vecteur vitesse :

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}(R\vec{u}_r)}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t} = R\dot\theta\vec{u}_\theta \iff \boxed{\vec{v} = R\omega_0\vec{u}_\theta}$$

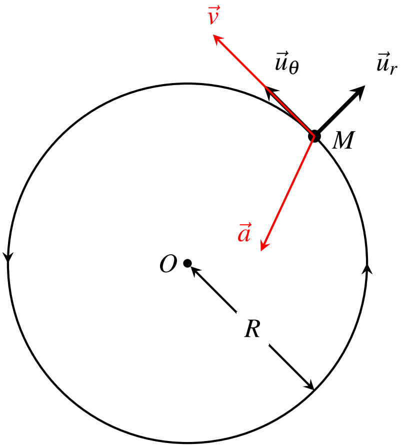
Le vecteur vitesse est **orthoradial** (colinéaire à $\vec{u}_\theta$). On dérive une deuxième fois pour obtenir le vecteur accélération :

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}(R\omega_0\vec{u}_\theta)}{\mathrm{d}t} = R\omega_0\frac{\mathrm{d}\vec{u}_\theta}{\mathrm{d}t} = R\omega_0\times(-\dot\theta\vec{u}_r) \iff \boxed{\vec{a} = -R\omega_0^2\vec{u}_r}$$

Le vecteur accélération est **centripète** (dirigé vers le centre de la trajectoire, selon $-\vec{u}_r$). On représente schématiquement la situation (figure de gauche)



Mouvement circulaire uniforme



Mouvement circulaire décéléré

On calcule les normes :

$$\boxed{\|\vec{v}\| = R\omega_0 = 5{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\|\vec{a}\| = R\omega_0^2 = 3{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}}$$

2. Pour $t > 0$ on a bien entendu toujours $r(t) = R = \text{Cste}$. En revanche c'est désormais l'accélération angulaire $\ddot{\theta} = -\alpha_0$ qui est constante. On intègre une fois pour avoir la vitesse angulaire :

$$\dot{\theta}(t) = -\alpha_0 t + C_1$$

La condition initiale $\dot{\theta}(0) = \omega_0$ impose que $C_1 = \omega_0$ d'où $\dot{\theta}(t) = -\alpha_0 t + \omega_0$. On exprime le vecteur vitesse :

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}(R\vec{u}_r)}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta \iff \boxed{\vec{v} = R(-\alpha_0 t + \omega_0)\vec{u}_\theta}$$

puis le vecteur accélération :

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\left[R(-\alpha_0 t + \omega_0)\vec{u}_\theta\right]}{\mathrm{d}t} = R\left[-\alpha_0\vec{u}_\theta + (-\alpha_0 t + \omega_0)\frac{\mathrm{d}\vec{u}_\theta}{\mathrm{d}t}\right]$$

$$\iff \boxed{\vec{a} = R\left[-\alpha_0\vec{u}_\theta - (-\alpha_0 t + \omega_0)^2\vec{u}_r\right]}$$

Le vecteur accélération a une composante suivant $-\vec{u}_r$ et une autre suivant $-\vec{u}_\theta$. On représente schématiquement la situation (voir ci-dessus, figure de droite).

3. La particule s'arrête lorsque sa vitesse s'annule, c'est-à-dire lorsque $\dot{\theta} = 0$. On résout l'équation :

$$\dot{\theta}(t_{\text{arrêt}}) = 0 \iff -\alpha_0 t + \omega_0 = 0 \iff \boxed{t_{\text{arrêt}} = \frac{\omega_0}{\alpha_0} = 26\,\text{s}}$$

4. On détermine la position angulaire de la particule en intégrant $\dot{\theta}(t)$:

$$\theta(t) = -\frac{1}{2}\alpha_0 t^2 + \omega_0 t + C_2$$

avec C_2 une constante d'intégration que l'on ne cherche pas à déterminer. On calcule l'angle balayé par la particule entre $t = 0$ et $t = t_{\text{arrêt}}$:

$$\Delta\theta = \theta(t_{\text{arrêt}}) - \theta(0) = -\frac{1}{2}\alpha_0 t_{\text{arrêt}}^2 + \omega_0 t_{\text{arrêt}} = \frac{\omega_0^2}{2\alpha_0}$$

La longueur d'un arc de cercle de rayon R qui intercepte l'angle $\Delta\theta$ vaut $L = R\Delta\theta$. On en déduit que la distance totale parcourue par la particule pendant son freinage vaut :

$$\boxed{L = \frac{R\omega_0^2}{2\alpha_0} = 72\,\text{m}}$$

Application 6

Un avion de chasse, assimilé ici à un point matériel, effectue un demi-tour en suivant une trajectoire circulaire de rayon R, à la vitesse constante $v = 800\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$. Déterminer le rayon minimum de la trajectoire pour que l'accélération ne dépasse pas $5g$ où $g = 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ est l'accélération de la pesanteur.