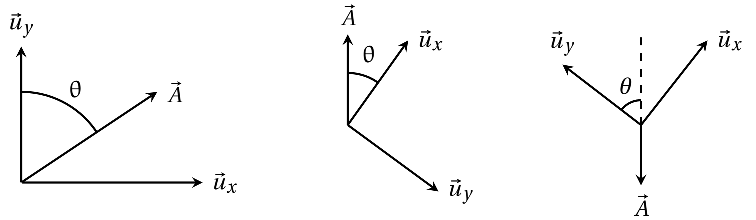
TD7 : Cinématique

Exercice 1 : Projection dans une base orthonormée

Dans chacun des trois cas ci-dessous, exprimer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{A}$ dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$. On notera $A = \|\vec{A}\|$.



⋆ Exercice 2 : Mouvement d'un point matériel

Les coordonnées d'un point matériel dans un repère cartésien à deux dimensions (Oxy) sont $x(t) = v_0 t$ et $y(t) = a_0 t(t - t_0)$, avec v_0 et a_0 positifs.

1. Exprimer le vecteur vitesse et le vecteur accélération dans la base cartésienne, puis exprimer leur norme.
2. Déterminer l'équation cartésienne $y(x)$ de la trajectoire et tracer son allure.
3. (⋆⋆) Rappeler l'expression du vecteur accélération dans la base de Frenet. En déduire que le rayon de courbure vérifie :

$$R = \frac{\|\vec{v}\|^2}{\sqrt{\|\vec{a}\|^2 - \left(\frac{\mathrm{d}\|\vec{v}\|}{\mathrm{d}t}\right)^2}}$$

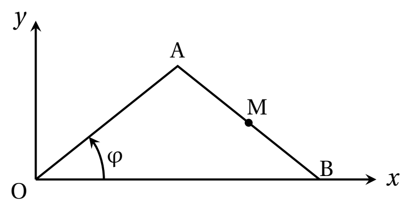
   Donner son expression à la date $t = t_0/2$.

⋆ Exercice 3 : Distance de freinage, distance d'arrêt

Un véhicule roule à une vitesse $v_0 = 70\,\mathrm{km/h}$ et suit une trajectoire rectiligne. Le conducteur aperçoit un danger et, après un temps de réaction d'une seconde, freine avec une accélération constante en norme $a = 4{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Calculer la distance de freinage et la distance d'arrêt.

⋆ Exercice 4 : Rotation et translation

Soit le système ci-contre, constitué de deux tiges identiques OA et AB, de longueur $2a$, articulées en A. La tige OA peut pivoter autour du point O, et l'extrémité de la tige AB peut coulisser le long de l'axe (Ox). L'angle φ suit la loi horaire $\varphi(t) = \omega t$ avec $\omega = \mathrm{Cste}$.



1. Exprimer les coordonnées cartésiennes (x, y) du centre M de [AB] en fonction de a et φ.
2. Déterminer l'équation cartésienne $y(x)$ de la trajectoire M. Tracer son allure.

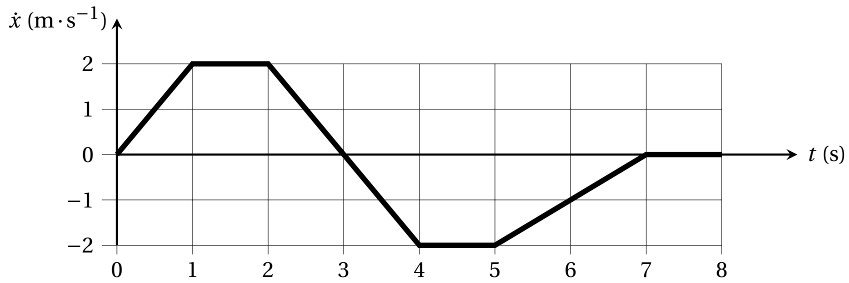
⋆ Exercice 5 : Balle lancée vers le ciel

Un homme situé au sommet d'un immeuble de hauteur h inconnue lance une balle vers le ciel avec une vitesse initiale de $15\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. La balle atteint le sol $4{,}25\,\mathrm{s}$ plus tard. L'accélération de la balle est $\vec{a} = -g\vec{u}_z$ avec $\vec{u}_z$ un vecteur unitaire vertical ascendant et $g = 10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. On supposera pour simplifier que le mouvement de la balle est purement vertical.

1. Exprimer l'altitude $z(t)$ de la balle à tout instant (on prendra l'origine au niveau du sol).
2. Quelle est la hauteur de l'immeuble ?
3. Avec quelle vitesse la boule atteint-elle le sol ?
4. Quelle est la hauteur maximale atteinte par la balle ?

⋆⋆ Exercice 6 : Avec un graphe

Une particule se déplace le long d'un axe (Ox) ; elle se trouve en $x = 0$ à l'instant initial. On représente ci-dessous le graphe donnant les variations de sa vitesse $\dot{x}(t)$.



1. Tracer le graphe de l'accélération $\ddot{x}$ en fonction du temps. Préciser la nature du mouvement dans les différentes phases.
2. Calculer la position de la particule à la date $t = 7\,\mathrm{s}$.
   Indication : on pourra utiliser le fait que $x(7) - x(0) = \int_0^7 \dot{x}(t)\mathrm{d}t$.
3. Calculer la distance totale parcourue par la particule entre $t = 0$ et $t = 7\,\mathrm{s}$.
   Indication : on pourra l'obtenir directement de la manière suivante : $D = \int_0^7 \|\vec{v}(t)\|\mathrm{d}t$.

⋆ Exercice 7 : Mouvement d'une horloge

La grande aiguille d'une horloge (celle des minutes) a une longueur $L_g = 1{,}50\,\mathrm{m}$, la petite aiguille (celle des heures) une longueur $L_p = 0{,}70\,\mathrm{m}$. On suppose qu'elles tournent à vitesse angulaire constante. Calculer pour chaque aiguille :

(a) la vitesse angulaire ;

(b) la vitesse en norme de la pointe ;

(c) l'accélération en norme de la pointe.

⋆ Exercice 8 : Mouvement hélicoïdal

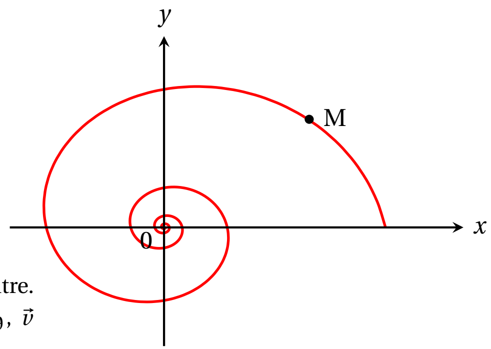
Dans un référentiel $\mathscr{R}$, un point M décrit une trajectoire dont les équations horaires dans la base cartésienne sont :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) : \begin{cases} x(t) = r_0\cos\omega t \\ y(t) = r_0\sin\omega t \\ z(t) = h\omega t \end{cases} \quad \text{(où } h, \omega \text{ et } r_0 \text{ sont des constantes)}$$

1. Montrer que la distance qui sépare M de l'axe (Oz) est constante.
2. Exprimer le vecteur vitesse et le vecteur accélération dans la base cartésienne.
3. Rappeler les relations entre les coordonnées cartésiennes (x, y) et les coordonnées cylindro-polaires (r,θ). Proposer alors des équations horaires $(r(t),\theta(t),z(t))$ pour cette trajectoire. Exprimer ensuite le vecteur vitesse et le vecteur accélération dans la base cylindrique.
4. Montrer que le vecteur vitesse fait un angle constant avec l'horizontale.

⋆⋆ Exercice 9 : Spirale exponentielle

Un point M décrit une courbe plane d'équation paramétrique en coordonnées polaires $\left(r(t) = ae^{-t/\tau}\,;\theta(t) = \omega t\right)$, avec a, ω et τ des constantes positives.



1. Exprimer $\vec{v}$ et $\vec{a}$ dans la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ en fonction du temps t et des constantes a, ω et τ.
2. La trajectoire du point M est représentée ci-contre. Tracer au niveau du point M les vecteurs $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$, $\vec{v}$ ainsi que les vecteurs de Frenet $\vec{u}_n$ et $\vec{u}_t$.
3. On appelle $\alpha = \widehat{(\vec{u}_\theta, \vec{v})}$ l'ange entre les vecteurs $\vec{u}_\theta$ et $\vec{v}$ à un instant t. Exprimer $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ en fonction de $\xi = \omega\tau$. En déduire que α est indépendant du temps.
4. Montrer que le rayon de courbure R au point M est proportionnel à la distance r : $R = f(\xi)r$, où $f(\xi)$ est une fonction de ξ à déterminer.

⋆⋆ Exercice 10 : Intégration par séparation des variables

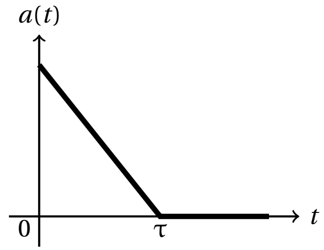
On étudie le mouvement d'un point qui ne peut se déplacer que de manière rectiligne sur un axe (Ox). On suppose que sa vitesse v, à l'instant t, est liée à son abscisse x par une relation de la forme :

$$x = a\sqrt{v} - b$$

Où a et b sont des constantes positives. On suppose qu'à $t = 0$, $x = 0$.

1. En écrivant $v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, réécrire cette équation sous la forme $f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ où f est une fonction à déterminer.
2. Intégrer cette équation entre la date $t = 0$ et une date t quelconque. En déduire la loi horaire $x(t)$.

⋆⋆⋆ Exercice 11 : Record du monde du 100 m



Le record du monde du 100m masculin est actuellement détenu par le sprinteur jamaïcain Usain Bolt, qui l'établit le 16 Août 2009 aux mondiaux d'athlétisme de Berlin, en 9"58. Le graphique ci-dessous représente de manière simplifiée l'évolution temporelle de l'accélération d'Usain Bolt pendant sa course.

Sachant que la phase d'accélération dure $\tau = 4{,}5\,\mathrm{s}$, calculer la vitesse de pointe d'Usain Bolt lors de son record.

Solutions :

Ex1 : a) $\vec{A} = \|\vec{A}\|(\sin\theta\,\vec{u}_x + \cos\theta\,\vec{u}_y)$ b) $\vec{A} = \|\vec{A}\|(\cos\theta\,\vec{u}_x - \sin\theta\,\vec{u}_y)$ c) $\vec{A} = \|\vec{A}\|(-\sin\theta\,\vec{u}_x - \cos\theta\,\vec{u}_y)$

Ex2 : 1. $\vec{v} = v_0\,\vec{u}_x + a_0(2t - t_0)\,\vec{u}_y$; $\vec{a} = 2a_0\,\vec{u}_y$; $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_0^2 + a_0^2(2t-t_0)^2}$; $\|\vec{a}\| = 2a_0$
2. $y(x) = \frac{a_0}{v_0^2}x(x - v_0 t_0)$. ; 3. $R(t_0/2) = \frac{v_0^2}{2a_0}$

Ex3 : $d_{\text{freinage}} = 47{,}3\,\mathrm{m}$; $d_{\text{arrêt}} = 66{,}7\,\mathrm{m}$

Ex4 : 1. $x = 3a\cos\varphi$ et $y = a\sin\varphi$; 2. $\dfrac{x^2}{9} + y^2 = a^2$

Ex5 : 1. $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h$ (avec $v_0 = 15\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$)
2. $h = 26{,}6\,\mathrm{m}$ 3. $v_{\text{sol}} = 27{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 4. $z_{\max} = 37{,}8\,\mathrm{m}$

Ex6 : 1. (dates en s) mouvement uniforme pour $1 \le t \le 2$ et $4 \le t \le 5$; immobile pour $7 \le t \le 8$; mouvement uniformément accéléré pour $0 \le t \le 1$, $2 \le t \le 4$ et $5 \le t \le 7$
2. $x(7) = -1\,\mathrm{m}$; 3. $D = 9\,\mathrm{m}$

Ex7 : grande aiguille : $\dot\theta = 1{,}7\cdot10^{-3}\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$; $v_{\text{pointe}} = 2{,}6\cdot10^{-3}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$; $a_{\text{pointe}} = 4{,}6\cdot10^{-6}\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.
petite aiguille : $\dot\theta = 1{,}5\cdot10^{-4}\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$; $v_{\text{pointe}} = 1{,}0\cdot10^{-4}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$; $a_{\text{pointe}} = 1{,}5\cdot10^{-8}\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Ex8 : 1. distance r_0
2. $\vec{v} = -\omega r_0\sin(\omega t)\,\vec{u}_x + \omega r_0\cos(\omega t)\,\vec{u}_y + h\omega\,\vec{u}_z$; $\vec{a} = -\omega^2 r_0\cos(\omega t)\,\vec{u}_x - \omega^2 r_0\sin(\omega t)\,\vec{u}_y$
3. $\vec{v} = r_0\omega\,\vec{u}_r + h\omega\,\vec{u}_z$; $\vec{a} = -r_0\omega^2\,\vec{u}_r$; 4. angle $\alpha = \arctan\left(\frac{h}{r_0}\right)$

Ex9 : 1. $\vec{v} = ae^{-t/\tau}\left(-\frac{1}{\tau}\,\vec{u}_r + \omega\,\vec{u}_\theta\right)$ 2. $\vec{a} = ae^{-t/\tau}\left[\left(\frac{1}{\tau^2} - \omega^2\right)\vec{u}_r - \frac{2\omega}{\tau}\,\vec{u}_\theta\right]$
3. $\cos\alpha = \frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}$; $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}$ 4. $f(\xi) = \sqrt{1 + \frac{1}{\xi^2}}$.

Ex10 : 2. $x(t) = \frac{b^2 t}{a^2 - bt}$

Ex11 : $v_{\max} = 12{,}4\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$