Devoir n°9 (non surveillé)

EXERCICE

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\,dx \;\; ; \;\; \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{(2+\cos x)(3+\cos x)}\,dx \;\; ; \;\; \int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2+1}\,dx \;\; ; \;\; \int_0^1 \frac{x^5}{1+x^{12}}.$$

PROBLÈME

Le but du problème est de déterminer une valeur approchée de π.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}.$$

1) Soit n un entier naturel.

a) Montrer que, pour tout réel t, $S_n'(t) = \dfrac{1-(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}$.

b) En déduire que, pour tout réel x, $\operatorname{Arctan} x - S_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}dt$.

c) On admet que si f est une fonction continue sur un segment $[a,b]$ (avec $a<b$), alors $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \displaystyle\int_a^b |f(t)|dt$.

En utilisant ce théorème, établir, pour tout réel positif x, l'inégalité :

$$|\operatorname{Arctan} x - S_n(x)| \leqslant \frac{x^{2n+3}}{2n+3}.$$

d) Montrer finalement que, pour tout $x \in [0,1]$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \operatorname{Arctan} x$.

2) On va déterminer une première approximation de π.

a) Montrer que $\pi = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} 4S_n(1)$ et que $|\pi - 4S_n(1)| \leqslant \dfrac{4}{2n+3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Pour quelle valeur de n peut-on en déduire que $4S_n(1)$ est une valeur approchée de π à 10^{-1} près ?

3) La suite de terme général $4S_n(1)$ converge très lentement vers π. Dans cette question on va obtenir un procédé d'approximation de π beaucoup plus rapide.

a) À l'aide des formules d'addition, montrer que $\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{4}$.

b) Soient $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x>0$. Montrer qu'un argument du nombre complexe $x+iy$ est $\operatorname{Arctan}\dfrac{y}{x}$.

c) Retrouver alors le résultat du a) en considérant le nombre complexe $(2+i)(3+i)$.

d) En déduire que $\pi = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} T_n$ où $T_n = 4\left(S_n\left(\frac{1}{2}\right) + S_n\left(\frac{1}{3}\right)\right)$.

e) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $|\pi - T_n| \leqslant \dfrac{4}{2n+3}\left(\dfrac{1}{2^{2n+3}} + \dfrac{1}{3^{2n+3}}\right)$.

f) En prenant $n=4$, en déduire une valeur approchée de π en donnant un majorant de l'erreur commise.