CHAPITRE 8 Dynamique

Ce chapitre traite essentiellement des applications de la deuxième loi de Newton (ou principe fondamental de la dynamique) dans un cadre bien précis :

- Les systèmes sont assimilés à des points matériels.
- On se limite en premier lieu à l'étude du poids et des interactions de contact solide/fluide puis solide/solide.

Nous aborderons dans les chapitres suivants les systèmes oscillants (ressorts, pendules), les force électriques et magnétiques, la force gravitationnelle, les forces de pression et les solides en rotation.

1 Lois du mouvement

1.1 Principe d'inertie (1ère loi de Newton)

1.1.1 Énoncé, notion de référentiel galiléen

Principe d'inertie

Il existe une classe de référentiels, dits **galiléens** (ou inertiels), dans lesquels tout point matériel isolé ou pseudo-isolé est au repos ou en mouvement rectiligne uniforme.

Remarque : Un point matériel est un système qui possède une certaine masse et que l'on assimile à un point. Il est isolé s'il n'est soumis à aucune force et pseudo-isolé s'il est soumis à des forces dont la résultante est nulle.

> Le principe d'inertie définit ce qu'est un référentiel galiléen. Il est à noter que si $\mathscr{R}$ est un référentiel galiléen alors **tout référentiel $\mathscr{R}'$ en translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathscr{R}$ est lui aussi galiléen**.

1.1.2 Masse, inertie

D'après le principe d'inertie un point matériel P isolé ou pseudo-isolé possède une accélération nulle donc un vecteur vitesse constant ($\vec{a} = \vec{0} \iff \vec{v} = \overrightarrow{\text{Cste}}$). À l'inverse un point matériel soumis à une force résultante non nulle voit son vecteur vitesse varier ($\vec{a} \neq \vec{0}$). En pratique tout corps que l'on soumet à une force oppose une résistance à la modification de son vecteur vitesse ; cette propriété s'appelle **l'inertie**.

> En mécanique la **masse** (en kg) est la grandeur qui mesure l'inertie d'un corps, c'est-à-dire sa résistance à la modification de son vecteur vitesse sous l'effet d'une force.

1.2 Principe fondamental de la dynamique (2ème loi de Newton)

1.2.1 Quantité de mouvement

Dans un référentiel donné la quantité de mouvement d'un point matériel de masse m est définie par $\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$.

1.2.2 Énoncé

Principe fondamental de la dynamique (PFD)

Dans un référentiel galiléen la dérivée de la quantité de mouvement d'un point matériel est égale à la somme des forces.

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{F}}$$

> Dans le cadre du programme de première année on traite uniquement de systèmes dont la masse est constante. Le principe fondamental de la dynamique prend alors la forme suivante :
>
> $$\boxed{m\vec{a} = \sum \vec{F}}$$
>
> On note que pour un point matériel isolé ou pseudo-isolé $\sum \vec{F} = \vec{0}$ donc l'accélération est nulle ; on retrouve l'énoncé du principe d'inertie.

Remarque : On peut généraliser l'énoncé du principe fondamental de la dynamiques aux systèmes non ponctuels de masse totale m constante :

$$m\vec{a}_G = \sum \vec{F}_{\text{ext}}$$

avec $\vec{a}_G$ l'accélération du **centre d'inertie** du système et $\sum \vec{F}_{\text{ext}}$ la résultante des forces extérieures qui s'exercent sur ce système.

1.3 Principe des actions réciproques (3ème loi de Newton)

Principe des actions réciproques

Si $(\mathscr{S}_1)$ et $(\mathscr{S}_2)$ sont deux systèmes quelconques en interaction mécanique alors les forces que ces systèmes exercent l'un sur l'autre sont opposées :

$$\boxed{\vec{F}_{2\to1} = -\vec{F}_{1\to2}}$$

1.4 Mise en œuvre pratique du PFD

Notre objectif est de déterminer la trajectoire d'un point matériel P, c'est-à-dire à obtenir les lois horaires qui donnent **les coordonnées de P à tout instant**. Pour cela il faut connaître :

- la position et la vitesse de P à l'instant initial,
- les forces qui agissent sur P.

Cette année nous verrons essentiellement des forces qui dépendent de la position $\vec{r}$ ou de la vitesse $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ de P. On peut alors voir le PFD comme une équation différentielle du deuxième ordre vérifiée par le vecteur position :

$$m\ddot{\vec{r}} = \sum \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$$

En projetant le PFD dans une base bien choisie on transforme cette équation différentielle vectorielle en une ou plusieurs équations différentielles scalaires (le nombre d'équations dépend de la dimension de la base choisie). Par exemple dans le cas d'un mouvement rectiligne le long d'un axe (Ox) la projection du PFD conduit à une équation du type :

$$m\ddot{x} = \sum F(x, \dot{x})$$

La résolution d'une telle équation différentielle nécessite de calculer deux constantes d'intégration, à l'aide de deux conditions initiales (position et vitesse initiale). On obtient alors la position $x(t)$ du point P à tout instant. Bien entendu cela se généralise pour des mouvements à 2 ou 3 dimensions, comme nous le verrons dans les exemples qui suivent.

En résumé

- Définir le système ;
- Indiquer le référentiel (en première année on le choisira toujours galiléen) ;
- Préciser le repère d'étude (un schéma est nécessaire) ;
- Faire l'inventaire des forces (il est conseillé de les représenter sur le schéma en prévision des calculs de projection) ;
- Énoncer le PFD (vectoriel) puis le projeter dans la base d'étude ;
- Résoudre la (ou les) équation(s) différentielle(s) obtenue(s). Il faut justifier les valeurs des constantes d'intégration en explicitant les conditions initiales.

Nous allons voir dans les parties suivantes des applications de cette méthode, d'abord dans le cas d'une chute libre sans frottement, puis une chute avec frottements fluides et enfin nous allons étudier l'adhérence et le glissement d'un solide sur un plan incliné.

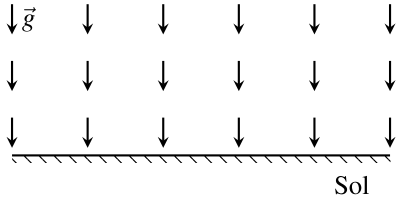
2 Chute libre

Un corps est en chute libre s'il n'est soumis qu'à son poids. Dans l'atmosphère terrestre ce ne peut être qu'une approximation qui suppose de négliger les frottements de l'air.

Poids d'un corps

On appelle poids $\vec{P}$ la force gravitationnelle que la Terre exerce sur un corps de masse m situé à proximité de la surface. Le poids d'un corps est proportionnel à sa masse : $\boxed{\vec{P} = m\vec{g}}$, avec $\vec{g}$ le *champ de pesanteur* au niveau de la surface terrestre.

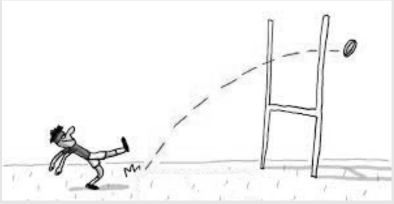
En première approximation, pour des petits déplacements (typiquement inférieurs au kilomètre, à l'horizontale ou à la verticale), on peut considérer que le champ de pesanteur terrestre est **uniforme**, c'est-à-dire que le vecteur $\vec{g}$ ne dépend pas de la position. Il est vertical, dirigé vers le sol et on note $g = \|\vec{g}\| \simeq 9,8\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$ sa norme, parfois appelée *accélération de la pesanteur*.



Champ de pesanteur $\vec{g}$ à proximité de la surface de la Terre

Exemple

Un joueur de rugby tente un coup de pied de pénalité. Pour que celle-ci soit convertie le ballon doit être frappé avec le pied puis passer entre les perches, au-dessus de la barre transversale située à une hauteur $h = 3\,\mathrm{m}$ au-dessus du sol.



Le ballon, assimilé pour simplifier à un point matériel, est initialement au sol (on néglige la hauteur du tee sur lequel il est posé) ; il est situé à une distance $L = 35\,\mathrm{m}$ des perches. Le ballon est frappé avec une vitesse initiale $v_0 = 75\,\mathrm{km/h}$ dans une direction faisant un angle de $35°$ avec l'horizontale. L'accélération de la pesanteur vaut $g = 9,8\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$. On néglige tout frottement.

1. Établir les équations du mouvement du ballon lors du tir.

2. En déduire les équations horaires de ce mouvement.

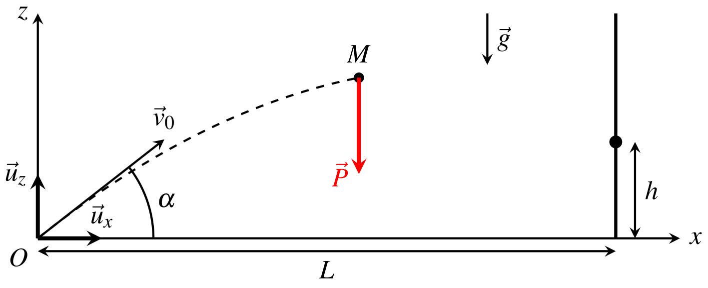
3. Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire du ballon.

4. En supposant que le ballon se dirige bien entre les deux perches la pénalité est-elle réussie ?

► **Système + référentiel + repère + schéma**

1. Le système étudié est le ballon. On se place (comme toujours dans ce chapitre) dans le **référentiel terrestre supposé galiléen**.

Pour un mouvement de chute libre on utilise généralement la **base cartésienne** car le poids du ballon est un vecteur constant, qui sera donc plus simple à projeter dans une base fixe. On définit le repère représenté sur le schéma ci-dessous avec un axe (Oz) vertical ascendant et un axe (Ox) horizontal dans la direction du tir. Pour simplifier les calculs on place l'origine O au niveau du point de départ du ballon. L'origine des temps est prise à l'instant du coup de pied.



► **Bilan des forces + PFD**

On étudie le mouvement du ballon pendant son vol. Puisque l'on néglige tout frottement le ballon n'est soumis qu'à son **poids** $\vec{P} = m\vec{g}$. On applique le principe fondamental de la dynamique :

$$m\vec{a} = \vec{P} \iff \vec{a} = \vec{g}$$

► **Projeter le PFD dans la base d'étude**

Pour projeter le vecteur accélération **il faut se rapporter au cours de cinématique** ; en coordonnées cartésiennes $\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{z}\vec{u}_z$. Le vecteur $\vec{g}$ est vertical et descendant, on écrira donc $\vec{g} = -g\vec{u}_z$. Avec la notation des vecteurs en colonne on voit rapidement apparaître les deux projections du PFD vectoriel sur $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$:

$$\vec{a} = \vec{g} \iff \left| \begin{array}{c} \ddot{x} \\ \ddot{z} \end{array} \right. = \left| \begin{array}{c} 0 \\ -g \end{array} \right. \iff \boxed{\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases}}$$

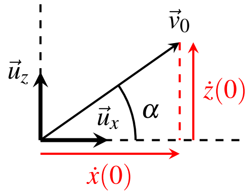
► **Déterminer les équations horaires du mouvement par double intégration**

2. Cette méthode a été détaillée au chapitre précédent. Dans le cas présent il y a deux équations différentielles ; en les intégrant deux fois successivement par rapport au temps on obtient :

$$\begin{cases} \dot{x} = C_1 \\ \dot{z} = -gt + C_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = C_1 t + C_3 \\ \ddot{z} = -\dfrac{1}{2}gt^2 + C_2 t + C_4 \end{cases}$$

avec C_1, C_2, C_3 et C_4 des constantes d'intégration à déterminer avec les **conditions initiales**.

On détermine les quatre conditions initiales. On a représenté ci-contre le vecteur $\vec{v}_0 = \dot{x}(0)\vec{u}_x + \dot{z}(0)\vec{u}_z$. Par projection dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_z)$ on constate que $\dot{x}(0) = v_0 \cos\alpha$ et $\dot{y}(0) = v_0 \sin\alpha$. Le ballon est à l'origine du repère à l'instant initial donc $x(0) = 0$ et $z(0)$. Avec ces conditions initiales on détermine les constantes d'intégration et on obtient :



$$\boxed{x(t) = v_0 \cos(\alpha) t \quad \text{et} \quad z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin(\alpha) t}$$

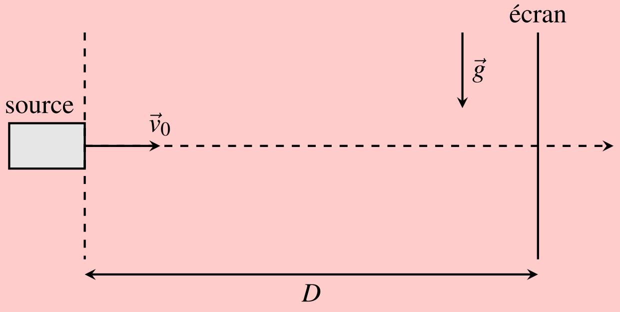
3. Pour obtenir l'équation cartésienne de la trajectoire on exprime t à partir de la première équation puis on injecte dans la deuxième :

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha} \implies z = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \sin\alpha \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

Après simplifications on obtient : $\boxed{z = -\dfrac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + \tan(\alpha) x}$.

4. Le ballon passe au-dessus de la barre transversale à condition que $z(x = L) > h$. On vérifie si c'est bien le cas : $\boxed{z(L) = 3{,}9\,\mathrm{m} > h}$. **La pénalité est réussie !**

Application 1



1. Une particule de masse m, lancée horizontalement avec une vitesse initiale v_0, n'est soumise qu'à l'action de la pesanteur. Déterminer la déviation verticale h de sa trajectoire à une distance D de son point de lancement.

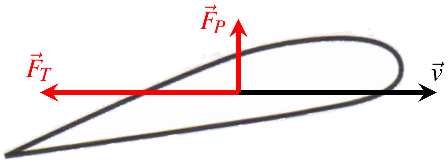
2. Les particules sont issues d'un faisceau dans lequel les vitesses initiales varient entre $50\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ et $150\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Un écran permet d'observer la position des particules à la distance D du point de lancement. Calculer la hauteur de la trace laissée par les particules sur l'écran.

   Données : $D = 566\,\mathrm{mm}$, $g = 9{,}8\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

3 Chute avec frottements fluides

On considère un fluide au repos dans le référentiel d'étude, perturbé par le passage d'un solide à la vitesse $\vec{v}$. La force que le fluide exerce sur le solide résulte des interactions de contact au niveau de l'interface entre les deux milieux. On sépare cette force en deux composantes :

- La **traînée** $\vec{F}_T$ est la composante colinéaire au déplacement du solide. Elle s'oppose au déplacement et est orientée en sens contraire du vecteur vitesse.
- La **portance** $\vec{F}_P$ est la composante perpendiculaire au déplacement du solide. Pour simplifier nous nous placerons dans des situations où la portance est négligeable devant la traînée.



Les interactions de contact sont difficiles à modéliser au niveau microscopique, elles dépendent de la nature du fluide, de la forme et de l'état de surface du solide, ainsi que de la vitesse de déplacement. On privilégie généralement des modèles empiriques (issus de l'expérience). L'expérience montre notamment que pour des vitesses de déplacement "faibles" la traînée est proportionnelle à la vitesse (modèle *linéaire*) tandis qu'aux vitesses plus élevées elle est proportionnelle au carré de la vitesse (modèle *quadratique*).

Remarque : Les notations utilisées pour les forces de traînée et de portance varient d'un exercice à l'autre. Par la suite nous noterons simplement $\vec{F}$ la traînée (la portance sera négligée).

Modèles de traînée

L'expression de la traînée $\vec{F}$ subie par un solide en mouvement à la vitesse $\vec{v}$ dans un fluide au repos dépend de la vitesse en norme v :

- pour des vitesses "faibles" on adopte le modèle **linéaire** : $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$;
- pour des vitesses "plus élevées" on adopte le modèle **quadratique** : $\vec{F} = -\beta v\vec{v}$.

Les coefficients α et β, bien que n'ayant pas la même dimension, sont appelés tous deux *coefficient de frottement fluide*. Ils dépendent du fluide ainsi que de la forme et de l'état de surface du solide. On obtient généralement leur valeur par l'expérience.

On ne cherchera pas à discuter du modèle le plus approprié. Dans un exercice il sera toujours précisé lequel des deux modèles s'applique à la situation. Une étude plus détaillée de la traînée et de la portance nécessite des éléments de mécanique des fluides.

Exemple

On cherche à expliquer la stabilité des gouttelettes d'eau située à l'intérieur d'un nuage. On suppose que l'air atmosphérique est au repos et on se place dans un repère cartésien (Oz) dirigé **vers le bas** dont l'origine, située à la base d'un nuage de type cumulo-nimbus, est à une altitude de 2 000 m au-dessus de la surface de la Terre.

On considère la chute d'une fine gouttelette d'eau liquide de rayon $r = 0{,}01\,\text{mm}$, initialement en O et sans vitesse. On suppose que les frottements exercés par l'air sur la gouttelette sont modélisables par la force $\vec{f} = -6\pi\eta r\vec{v}$, où $\eta = 1{,}8\cdot 10^{-5}\,\text{Pa}\cdot\text{s}^{-1}$ correspond à la viscosité de l'air et $\vec{v} = v_z\vec{u}_z$ à la vitesse de la gouttelette. On néglige la poussée d'Archimède.

Données : $g = 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, $\eta = 1{,}8\cdot 10^{-5}\,\text{Pa}\cdot\text{s}^{-1}$, masse volumique de l'eau liquide : $\rho = 1{,}0\cdot 10^3\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $v_z(t)$.

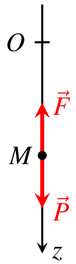
2. Calculer $v_z(t)$ et montrer que la goutte d'eau tend à atteindre une vitesse limite v_{lim} dont on précisera l'expression ainsi que la valeur numérique.

3. Évaluer un ordre de grandeur de la durée nécessaire pour que la gouttelette d'eau atteigne sa vitesse limite.

4. À l'aide d'une approximation que l'on justifiera, déterminer la durée de chute de la gouttelette jusqu'au sol.

► Mettre en œuvre le PFD

1. On étudie la gouttelette, soumise à son poids $\vec{P} = mg\vec{u}_z$ et à la force de frottement de l'air $\vec{F} = -6\pi\eta r v_z\vec{u}_z$.
On applique le principe fondamental de la dynamique à la gouttelette dans le référentiel terrestre supposé galiléen : $m\frac{\text{d}\vec{v}}{\text{d}t} = \vec{P} + \vec{F}$. On le projette sur $\vec{u}_z$:



$$m\frac{\text{d}v_z}{\text{d}t} = mg - 6\pi\eta r v_z \iff \boxed{\frac{\text{d}v_z}{\text{d}t} + \frac{6\pi\eta r}{m}v_z = g}$$

► Résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre

2. On a affaire à une équation différentielle linéaire du premier ordre. On identifie la constante de temps $\tau = \dfrac{m}{6\pi\eta r}$.

On calcule la solution particulière en résolvant l'équation sans dérivée : $v_{z,p} = \frac{mg}{6\pi\eta r}$. La solution générale s'écrit $v_z(t) = A\text{e}^{-t/\tau} + \frac{mg}{6\pi\eta r}$. On détermine la constante d'intégration A avec la condition initiale $v_z(0) = 0$. On montre alors que $A = -\frac{mg}{6\pi\eta r}$ et $\boxed{v_z(t) = \dfrac{mg}{6\pi\eta r}\left(1 - \text{e}^{-t/\tau}\right)}$.

Dans la limite $t \to +\infty$ la vitesse tend vers une limite $\boxed{v_\infty = \dfrac{mg}{6\pi\eta r}}$. On calcule la masse de la gouttelette : $m = \rho \times \frac{4}{3}\pi r^3 = 4{,}2 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{kg}$ et on obtient $\boxed{v_\infty = 0{,}012\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}}$.

3. La gouttelette atteint sa vitesse limite en une durée d'environ $\boxed{5\tau = 1{,}2\,\mathrm{ms}}$.

4. On peut supposer que la durée 5τ du régime transitoire est négligeable devant la durée complète de la chute. On considère donc que la gouttelette tombe à vitesse constante v_∞. La durée de la chute sur une hauteur $H = 2{,}0\,\mathrm{km}$ vaut $\boxed{t_{\text{chute}} = \dfrac{H}{v_\infty} = 1{,}7 \cdot 10^5\,\mathrm{s} \simeq 2\,\text{jours}}$.

Application 2

Une bille de masse m est plongée dans un fluide visqueux au repos dans le référentiel terrestre. Elle est lâchée à $t = 0$ sans vitesse initiale. La vitesse de la bille est notée $\vec{v} = v\vec{u}$ avec $\vec{u}$ un vecteur unitaire vertical descendant et $v > 0$ car la bille tombe. L'action du fluide est modélisée par une force de frottement du type $\vec{F} = -\beta v\vec{v}$.

1. Déterminer l'unité SI de β.

2. Établir l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$.

3. Déterminer la vitesse limite v_∞ atteinte par la bille en régime permanent, en fonction de m, g et β.

4. Calculer $v(t)$ en utilisant la méthode de séparation des variables. Identifier un temps caractéristique τ à exprimer en fonction de m, g et β.

Donnée : $\forall a \in \mathbb{R}^*$, $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}v}{a^2 - v^2} = \frac{1}{a}\operatorname{argth}\left(\frac{v}{a}\right) + \text{Cste}$

4 Frottements solides

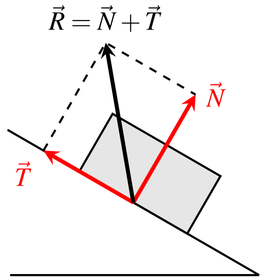
Les actions de contact entre deux solides diffèrent de celles entre un solide et un fluide. Dans ce chapitre on en propose une modélisation simplifiée, à l'échelle macroscopique, en s'appuyant notamment sur des lois phénoménologiques établies séparément par Amontons en 1699 puis Coulomb en 1781. Le système étudié est un solide $(\mathscr{S})$ en contact avec un support et on se limite aux cas de figure suivants :

- *adhérence* : $(\mathscr{S})$ est fixe par rapport au support ;
- *glissement* : $(\mathscr{S})$ est en translation par rapport au support.

Il s'agit de comprendre, avec quelques lois simples, comment interpréter des expériences classiques mettant en jeu le frottement entre deux solides.

4.1 Réaction d'un support

On appelle réaction $\vec{R}$ la résultante des actions de contact que le support exerce sur le solide $(\mathscr{S})$. Cette force n'est pas connue *a priori*, elle dépend des autres forces qui s'exercent sur $(\mathscr{S})$ ainsi que de la nature du contact (adhérence ou glissement). On sépare la réaction en deux composantes :



- la *réaction normale* $\vec{N}$, perpendiculaire au support ;
- la *réaction tangentielle* $\vec{T}$, tangente au support, qui traduit les frottements entre les deux solides et s'oppose au glissement de $(\mathscr{S})$.

4.2 Lois d'Amontons-Coulomb

Ces lois décrivent de manière simplifiée, à l'échelle macroscopique, les actions de contact entre deux solides dans le cas de l'adhérence puis celui du glissement.

1ère loi : adhérence

$(\mathscr{S})$ est en adhérence avec le support tant que la condition suivante est remplie :

$$\|\vec{T}\| < f\|\vec{N}\|$$

2ème loi : glissement

En cas de glissement de $(\mathscr{S})$ sur le support :

$$\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\|$$

Le facteur sans dimension f est appelé *coefficient de frottement solide*, il mesure l'intensité des frottements. Il est à noter que f dépend uniquement des matériaux en contact ; il est indépendant de la surface de contact.

<u>Remarque</u> : En toute rigueur les coefficients sont distincts dans les deux lois, on parle de coefficient de frottement statique dans le cas de l'adhérence ($\|\vec{T}\| < f_s\|\vec{N}\|$) et de coefficient de frottement dynamique dans le cas du glissement ($\|\vec{T}\| = f_d\|\vec{N}\|$). On constate expérimentalement que $f_d \lesssim f_s$. Pour simplifier nous négligerons l'écart entre ces deux valeurs et considérerons un unique coefficient de frottement solide f pour traiter à la fois de l'adhérence et du glissement.

Glissement sans frottements

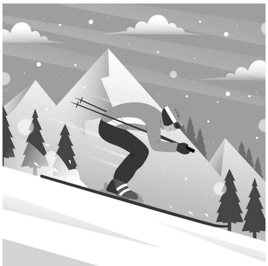
L'absence de frottements correspond à la limite $f \to 0$. Dans ce cas $\vec{T} = \vec{0}$ et **la réaction est perpendiculaire au support**.

4.3 Liaison unilatérale et bilatérale

Nous envisageons deux types de contact entre $(\mathscr{S})$ et le support (voir figures ci-dessous) :

• liaison *unilatérale* : $(\mathscr{S})$ est posé sur le support, le contact peut éventuellement être rompu ;

• liaison *bilatérale* : $(\mathscr{S})$ peut glisser le long du support mais le contact ne peut être rompu.



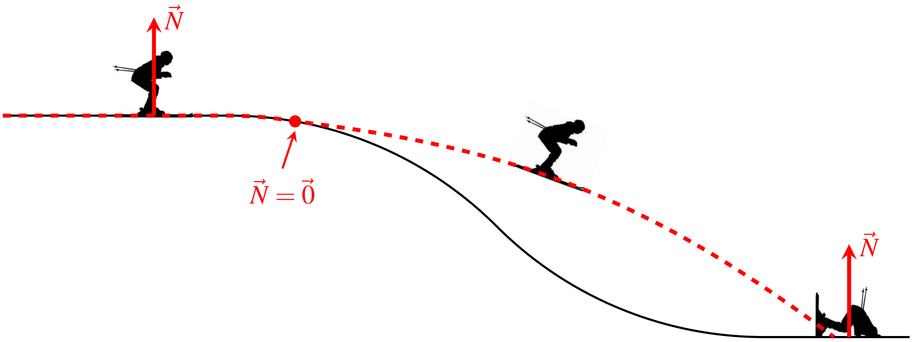
Liaison unilatérale : le contact peut être rompu (si le skieur franchit une bosse par exemple)

Liaison bilatérale : l'anneau peut glisser le long de la tringle mais le contact ne peut être rompu

Liaison unilatérale

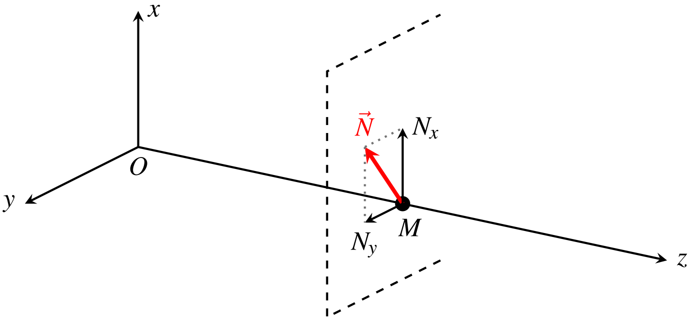
Dans le cas d'une liaison unilatérale :

- l'orientation de $\vec{N}$ est connue : elle est orthogonale au support et répulsive ;
- le contact entre $(\mathscr{S})$ et le support est rompu **lorsque** $\vec{N}$ **s'annule**.



Liaison bilatérale

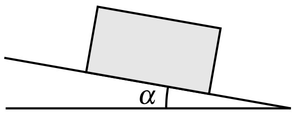
Dans le cas d'une liaison bilatérale l'orientation de $\vec{N}$ n'est pas connue *a priori*. Elle peut se trouver dans n'importe quelle direction du plan orthogonal à l'axe de la liaison.



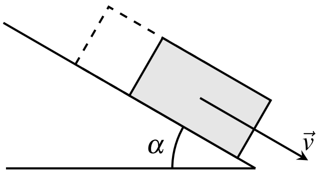
Anneau glissant le long d'un axe (Oz), la réaction normale est contenue dans le plan (Mxy) et possède *a priori* des composantes sur $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$

4.4 Mise en œuvre des lois d'Amontons-Coulomb : étude de l'adhérence

Lorsqu'il existe des frottements entre un solide et un support on observe que l'adhérence entre les deux est maintenue même lorsqu'il existe une action mécanique qui tend à faire glisser le solide. Cependant l'adhérence ne se maintient que jusqu'à un certain point, si l'action mécanique devient trop importante le solide se met à glisser.



Solide sur un plan faiblement incliné, l'action des frottements compense l'effet du poids et le solide adhère au support



Solide sur un plan fortement incliné, l'action des frottements n'est plus suffisante pour compenser l'effet du poids et le solide glisse

La question qui se pose généralement est : "À quelle condition l'adhérence peut-elle se maintenir ? " ou, ce qui revient au même : "À quelle condition le solide se met-il à glisser ? ". Par exemple dans la situation représentée schématiquement ci-dessus on peut se demander : "Le solide étant initialement immobile, à partir de quel angle minimal d'inclinaison du plan se met-il à glisser ? ". Le raisonnement repose sur la 1$^{\text{ère}}$ loi de Coulomb.

En résumé

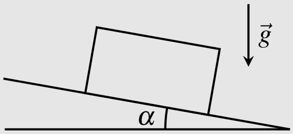
• Supposer qu'il y a adhérence, autrement dit que $(\mathscr{S})$ est en équilibre, et appliquer le *principe fondamental de la statique* ($\sum \vec{F} = \vec{0}$) ;

• Projeter le PFS dans une base orthonormée telle que l'un des vecteurs unitaires est orthogonal au support. En déduire les expressions de $\left\|\vec{N}\right\|$ et $\left\|\vec{T}\right\|$;

• Mettre en œuvre la 1$^{\text{ère}}$ loi de Coulomb et établir la condition pour laquelle l'adhérence est maintenue.

Exemple

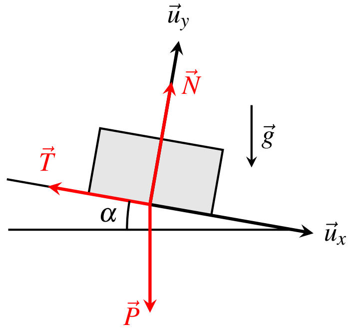
Un solide est posé sans vitesse initiale sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. On note f le coefficient de frottement entre le solide et le support.



Montrer qu'il existe un angle minimal α_m au-delà duquel le solide se met à glisser. Faire l'application numérique dans le cas d'un solide en métal posé sur un support en bois : $f = 0,55$.

► Mettre en œuvre le PFS

Le solide est supposé en équilibre (adhérence). Il est soumis à son poids $\vec{P}$ et à la réaction du support qui, en présence de frottements, est décomposée en une réaction normale $\vec{N}$ et une réaction tangentielle $\vec{T}$. On définit une base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ telle que $\vec{u}_x$ est tangent au plan et $\vec{u}_y$ orthogonal au plan. On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen.



On applique le principe fondamental de la statique au solide : $\vec{P} + \vec{N} + \vec{T} = \vec{0}$.

► Projeter pour calculer $\|\vec{N}\|$ et $\|\vec{T}\|$

La réaction normale est répulsive et orthogonale au support, elle est suivant $+\vec{u}_y$. La réaction tangentielle est dirigée selon $-\vec{u}_x$ car elle s'oppose au glissement du solide, qui tend sous l'effet du poids à se déplacer selon $+\vec{u}_x$. On ne connaît pas *a priori* les normes de ces deux réactions, donc on écrit leurs projections sous la forme $\vec{N} = \|\vec{N}\|\vec{u}_y$ et $\vec{T} = -\|\vec{T}\|\vec{u}_x$.

La projection du poids dans la base d'étude s'écrit $\vec{P} = mg(\sin\alpha\,\vec{u}_x - \cos\alpha\,\vec{u}_y)$. On écrit la projection du PFS :

$$\left|\begin{array}{c} mg\sin\alpha \\ -mg\cos\alpha \end{array}\right. + \left|\begin{array}{c} 0 \\ \|\vec{N}\| \end{array}\right. + \left|\begin{array}{c} -\|\vec{T}\| \\ 0 \end{array}\right. = \left|\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{cases} \|\vec{T}\| = mg\sin\alpha \\ \|\vec{N}\| = mg\cos\alpha \end{cases}$$

► Mettre en œuvre la 1$^{\text{ère}}$ loi de Coulomb

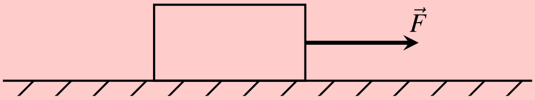
L'adhérence est maintenue tant que :

$$\|\vec{T}\| < f\|\vec{N}\| \iff mg\sin\alpha < fmg\cos\alpha \iff \tan\alpha < f$$

Le solide se met à glisser si l'angle α dépasse la valeur minimale $\boxed{\alpha_m = \arctan(f) = 29°}$.

Application 3

Une caisse de masse $m = 150\,\text{kg}$ est posée sur un sol horizontal. Une personne attache une corde autour de la caisse et tire dessus afin de la faire glisser sur le sol. Le coefficient de frottement entre la caisse et le sol vaut $f = 0,50$. On donne $g = 9,8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.



Quelle force minimale F_{min} permet de faire glisser la caisse sur le sol ?

4.5 Mise en œuvre des lois d'Amontons-Coulomb : étude du glissement

On étudie le glissement d'un solide en contact avec un support. L'objectif est d'obtenir la trajectoire afin d'étudier l'effet des frottements sur le déplacement. L'étude repose sur l'utilisation de la 2ème loi de Coulomb.

En résumé

- Appliquer le PFD et le projeter dans une base orthonormée telle que l'un des vecteurs unitaires est orthogonal au support.
- Utiliser la projection du PFD dans la direction orthogonale au mouvement pour calculer $\|\vec{N}\|$.
- Mettre en œuvre la 2ère loi de Coulomb pour calculer $\|\vec{T}\|$.
- Connaissant $\|\vec{T}\|$, utiliser la projection du PFD dans la direction du mouvement pour établir une équation différentielle.
- Intégrer pour obtenir la trajectoire.

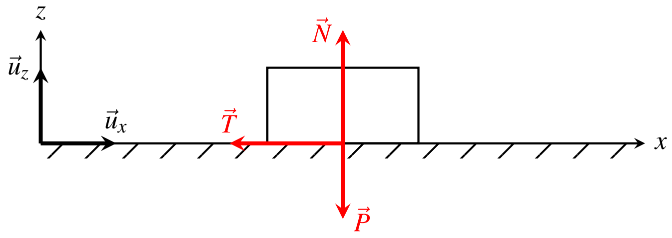
Exemple

Un véhicule de masse $m = 1,5\cdot 10^3\,\text{kg}$ est en mouvement rectiligne et uniforme, à la vitesse $v_0 = 90\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$, sur une route horizontale. Un danger apparaît et le conducteur appuie brutalement sur la pédale de frein. Les roues se bloquent et les pneus frottent contre le bitume. Le coefficient de frottement entre les roues et le sol vaut $f = 0,8$. On néglige les frottements de l'air. Pour simplifier on assimilera la voiture a un parallélépipède frottant contre le sol.

Calculer la distance de freinage.

► Mettre en œuvre le PFD

On se place dans un repère cartésien (Oxz) dont l'un des axes est dans le sens du mouvement et l'autre est orthogonal au sol. On suppose qu'à l'instant initial $t = 0$ la voiture est située à l'origine du repère. On mène l'étude dans le référentiel terrestre supposé galiléen.



La voiture est soumise à son poids $\vec{P}$ et à la réaction du sol $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$. On applique le principe fondamental de la dynamique :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{T}$$

► Projeter le PFD dans la base d'étude → calculer N

Les deux réactions sont de norme inconnue : $\vec{N} = \|\vec{N}\|\vec{u}_z$ et $\vec{T} = -\|\vec{T}\|\vec{u}_x$. Le poids s'écrit $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$. Comme le mouvement du véhicule est horizontal l'accélération n'a de composante que sur $\vec{u}_x$: $\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x$. On projette le PFD :

$$\left|\begin{array}{l} m\ddot{x} \\ 0 \end{array}\right. = \left|\begin{array}{l} 0 \\ -mg \end{array}\right. + \left|\begin{array}{l} 0 \\ \|\vec{N}\| \end{array}\right. + \left|\begin{array}{l} -\|\vec{T}\| \\ 0 \end{array}\right. \iff \begin{cases} \ddot{x} = -\dfrac{\|\vec{T}\|}{m} \\ \|\vec{N}\| = mg \end{cases}$$

► 2$^{\text{ème}}$ loi de Coulomb→ calculer T et en déduire l'équation du mouvement

Pendant la durée du freinage il y a glissement donc la deuxième loi de Coulomb s'applique : $\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\| = fmg$. On injecte cette expression dans le PFD projeté sur $\vec{u}_x$: $\boxed{\ddot{x} = -fg}$.

► Calculer la trajectoire par intégration

On intègre deux fois successivement pour obtenir la vitesse et la position. Avec les conditions initiales $\dot{x}(0) = v_0$ et $x(0) = 0$ on obtient :

$$\dot{x}(t) = -fgt + v_0 \qquad \text{et} \qquad x(t) = -\frac{1}{2}fgt^2 + v_0 t$$

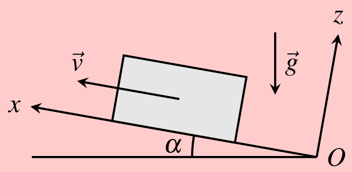
► Analyser la trajectoire

La voiture s'arrête lorsque $\dot{x}(t) = 0$. Cela se produit à la date $t_{\text{arrêt}} = \frac{v_0}{fg}$. La distance parcourue par la voiture pendant la durée du freinage vaut :

$$D_{\text{freinage}} = x(t_{\text{arrêt}}) = -\frac{1}{2}fgt_{\text{arrêt}}^2 + v_0 t_{\text{arrêt}} \iff \boxed{D_{\text{freinage}} = \frac{v_0^2}{2fg}}$$

Application 4

Un solide est lancé à $t = 0$ sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontal, depuis l'origine d'un repère (Oxz), vers le haut avec une vitesse initiale v_0. On note f le coefficient de frottement entre le solide et le plan. On néglige les frottements de l'air.



1. Déterminer la position $x(t)$ du solide pendant la phase de montée.

2. Déterminer l'altitude du solide quand il s'arrête.

3. On suppose qu'après s'être arrêté le solide n'adhère pas au support et commence à glisser vers le bas. Déterminer la vitesse v'_0 du solide quand il revient à son point de départ. Comparer à v_0.