Chapitre 6

ENSEMBLES - APPLICATIONS

I Notions sur les ensembles

1 Notation

On peut définir un ensemble **en extension**, c'est-à-dire en donnant explicitement ses éléments, ou **en compréhension**, c'est-à-dire en donnant une propriété caractéristique des éléments de cet ensemble. Dans les deux cas on utilise des accolades.

Exemples :

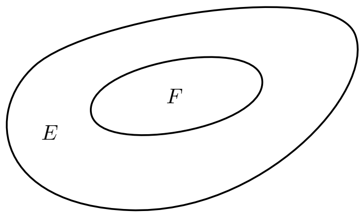
– $\{1, 2, 3\}$ désigne l'ensemble dont les éléments sont 1, 2 et 3. On peut aussi l'écrire par exemple $\{n \in \mathbb{N} \,|\, 0 < n < 4\}$ (ou $\{n \in \mathbb{N},\ 0 < n < 4\}$ ou $\{n \in \mathbb{N}\ ;\ 0 < n < 4\}$).

– L'ensemble des entiers naturels pairs peut être noté $\{0, 2, 4, \ldots\}$ ou $\{2p \,|\, p \in \mathbb{N}\}$ ou $\{n \in \mathbb{N} \,|\, \exists\, p \in \mathbb{N}, n = 2p\}$.

– $\{n \in \mathbb{N} \,|\, n^2 \leqslant 10\}$ est l'ensemble des entiers naturels dont le carré est inférieur ou égal à 10 (c'est-à-dire l'ensemble $\{0, 1, 2, 3\}$).

2 Sous-ensemble

Définition 1 *Soit E un ensemble. Un ensemble F est une* **partie de** *E ou un* **sous-ensemble de** *E si tous les éléments de F appartiennent à E. On dit alors que F est* **inclus dans** *E et on note $F \subset E$.*



Remarque : L'ensemble vide $\emptyset$ est donc toujours une partie de E.

Exemple : Pour les ensembles de nombres, on a les inclusions : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Définition 2 *Soit E un ensemble. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.*

Par exemple, si $E = \{a, b, c\}$, alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, E\}$.

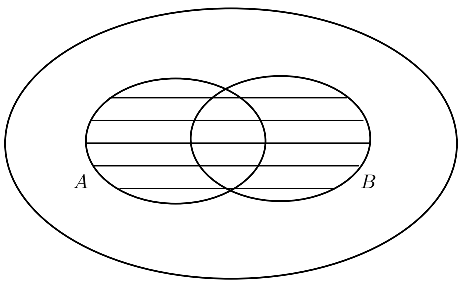
3 Réunion de sous-ensembles

Définition 3 *Soient E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E. La* **réunion** *(ou* **union***) de A et de B est le sous-ensemble de E formé des éléments qui appartiennent à A ou à B. On le note $A \cup B$.*

Autrement dit :

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B),$$

le « ou » étant ici inclusif (c'est-à-dire que x peut appartenir à A, à B ou aux deux).



Proposition 1 *Soient A, B et C trois sous-ensembles de E. Alors :*

(i) $A \cup B = B \cup A$ ($\cup$ est commutative).

(ii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ($\cup$ est associative).

(iii) $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$ ($\emptyset$ est élément neutre pour $\cup$).

Plus généralement :

Définition 4 *Soit E un ensemble et soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles de E. La* **réunion des** *A_i est le sous-ensemble de E formé des éléments qui appartiennent à l'un au moins des A_i. On le note $\bigcup_{i\in I} A_i$.*

Autrement dit :

$$x \in \bigcup_{i\in I} A_i \Leftrightarrow (\exists\, i \in I,\, x \in A_i).$$

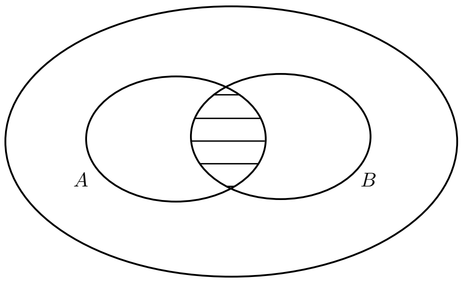
Exemple : Soit $E = \mathbb{R}$ et soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = [n, n+1]$ (i.e. $A_0 = [0,1]$, $A_1 = [1,2]$, etc...). Alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{R}^+$.

4 Intersection de sous-ensembles

Définition 5 *Soient E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E.* **L'intersection** *de A et de B est le sous-ensemble de E dont les éléments appartiennent à A et à B. On le note $A \cap B$.*

Autrement dit :

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B).$$



Proposition 2 *Soient A, B et C trois sous-ensembles de E. Alors :*

(i) $A \cap B = B \cap A$ ($\cap$ est commutative).

(ii) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ ($\cap$ est associative).

(iii) $A \cap E = E \cap A = A$ (E est élément neutre pour $\cap$).

Remarque : Si $A \cap B = \emptyset$ on dit que A et B sont **disjoints**.

Définition 6 *Soit E un ensemble et soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles de E.* **L'intersection des** *A_i est le sous-ensemble de E formé des éléments qui appartiennent à tous les A_i. On le note $\bigcap_{i\in I} A_i$.*

Autrement dit :

$$x \in \bigcap_{i\in I} A_i \Leftrightarrow (\forall\, i \in I,\, x \in A_i).$$

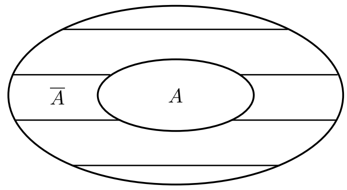
Exemple : Soit $E = \mathbb{R}$ et soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = [0, \frac{1}{n}]$ (i.e. $A_1 = [0,1]$, $A_2 = [0, \frac{1}{2}]$, etc...). Alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \{0\}$.

5 Complémentaire d'un sous-ensemble

Définition 7 *Soit E un ensemble et soit A un sous-ensemble de E. Le* **complémentaire de** A **dans** E *est le sous-ensemble de E formé des éléments qui n'appartiennent pas à A. On le note $\overline{A}$ ou A^c ou $E \setminus A$ ou $\complement_E A$.*

Autrement dit :

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A.$$



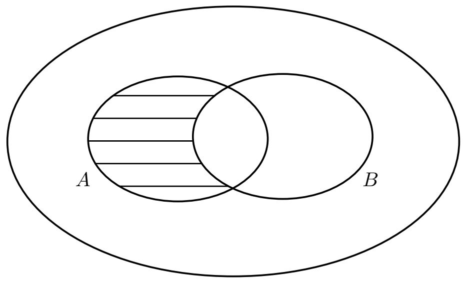
Remarque : $\overline{\emptyset} = E$ et $\overline{E} = \emptyset$.

6 Différence de deux sous-ensembles

Définition 8 *Soient E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E. La* **différence de** A **et de** B *est le sous-ensemble de E formé des éléments qui appartiennent à A mais pas à B. On le note $A \setminus B$.*

Autrement dit :

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \notin B).$$



Remarque : On a donc $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

7 Propriétés

• Egalité de deux sous-ensembles

Soient E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E. Alors :

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ et } B \subset A).$$

Pour montrer que $A = B$ on peut donc procéder par **double inclusion** : on montre que $A \subset B$, puis que $B \subset A$.

On peut aussi essayer d'établir l'équivalence $(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.

• Distributivité de $\cup$ par rapport à $\cap$

Proposition 3 *Soient E un ensemble et A, B et C des sous-ensembles de E. Alors :*

(i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(ii) $(B \cap C) \cup A = (B \cup A) \cap (C \cup A)$.

Démonstration :

Démontrons le (i) par double inclusion.

Montrons d'abord que $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Soit donc $x \in A \cup (B \cap C)$. Alors $x \in A$ ou ($x \in B$ et $x \in C$). Si $x \in A$, alors $x \in A \cup B$ et $x \in A \cup C$. Sinon $x \in B$ et $x \in C$ donc $x \in A \cup B$ et $x \in A \cup C$. Dans les deux cas, on peut conclure que $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Montrons maintenant que $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$. Soit donc $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Alors $x \in A \cup B$ et $x \in A \cup C$. Si $x \in A$, alors $x \in A \cup (B \cap C)$. Si $x \notin A$, alors nécessairement $x \in B$ et $x \in C$, donc $x \in B \cap C$, et donc $x \in A \cup (B \cap C)$ également.

Conclusion : on a montré que $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$ et que $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$, donc $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Le (ii) se déduit du (i) et de la commutativité de $\cup$. $\square$

• Distributivité de $\cap$ par rapport à $\cup$

Proposition 4 *Soient E un ensemble et A, B et C des sous-ensembles de E. Alors :*

(i) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(ii) $(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$.

Exercice 1 Démontrer cette proposition.

• Règles de De Morgan

Proposition 5 *Soient E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E. Alors :*

(i) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

(ii) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Démonstration :

(i) $x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \notin A \\ x \notin B \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in \overline{A} \\ x \in \overline{B} \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$.

(ii) $x \in \overline{A \cap B} \Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow (x \notin A \text{ ou } x \notin B) \Leftrightarrow (x \in \overline{A} \text{ ou } x \in \overline{B}) \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. □

8 Partition d'un ensemble

Définition 9 *Soit E un ensemble. Une* **partition** *de E est un ensemble de parties de E non vides, deux à deux disjointes et dont la réunion est égale à E.*

Par exemple $\{\{1,4\},\{2,3,5\},\{6\}\}$ est une partition de l'ensemble $\{1,2,3,4,5,6\}$.

Remarque : Si on ne demande pas aux parties d'être non vides, on obtient seulement un **recouvrement disjoint** de E.

Exercice 2 Déterminer les partitions de l'ensemble $\{1,2,3\}$.

9 Fonction indicatrice d'une partie

Définition 10 *Soit E un ensemble et soit A un sous-ensemble de E. La* **fonction indicatrice** *(ou* **fonction caractéristique***) de A est l'application $\mathbb{1}_A : E \to \{0,1\}$ définie par*

$$\mathbb{1}_A(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{array} \right. .$$

On peut aussi la noter χ_A.

Proposition 6 *Soient E un ensemble et A, B deux parties de E. Alors :*

(i) $\mathbb{1}_A^2 = \mathbb{1}_A$.

(ii) $A \subset B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A \leqslant \mathbb{1}_B$.

(iii) $A = B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$.

(iv) $\mathbb{1}_{A\cap B} = \min(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$.

(v) $\mathbb{1}_{A\cup B} = \max(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$.

(vi) $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$.

Démonstration :

(i) Immédiat.

(ii) ($\Rightarrow$) Supposons que $A \subset B$. Soit $x \in E$. Si $x \in A$, alors $x \in B$, donc $\mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_B(x) = 1$. Si $x \notin A$, alors $\mathbb{1}_A(x) = 0$. Dans les deux cas on a $\mathbb{1}_A(x) \leqslant \mathbb{1}_B(x)$.

($\Leftarrow$) Supposons que $\mathbb{1}_A \leqslant \mathbb{1}_B$. Alors, pour tout $x \in A$, on a $\mathbb{1}_A(x) = 1 \leqslant \mathbb{1}_B(x)$, donc $\mathbb{1}_B(x) = 1$ et $x \in B$.

(iii) $A = B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ et } B \subset A) \Leftrightarrow (\mathbb{1}_A \leqslant \mathbb{1}_B \text{ et } \mathbb{1}_B \leqslant \mathbb{1}_A) \Leftrightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$.

(iv) Si $x \in A \cap B$, alors $\mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_B(x) = 1$, donc $\min(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)(x) = (\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B)(x) = 1$. Si $x \notin A \cap B$, alors $\mathbb{1}_A(x) = 0$ ou $\mathbb{1}_B(x) = 0$, donc $\min(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)(x) = (\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B)(x) = 0$. On a donc toujours $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = \min(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)(x) = (\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B)(x)$.

(v) Analogue en distinguant les cas $x \in A \cap B$, $x \in A \setminus B$, $x \in B \setminus A$, $x \in \overline{A \cup B}$.

(vi) Si $x \in A$, $\mathbb{1}_{\overline{A}}(x) = 0$ et $1 - \mathbb{1}_A(x) = 0$, et si $x \notin A$, $\mathbb{1}_{\overline{A}}(x) = 1$ et $1 - \mathbb{1}_A(x) = 1$. □

En utilisant les fonctions indicatrices, on peut démontrer assez simplement de nombreuses propriétés ensemblistes.

Exercice 3 Redémontrer la distributivité de $\cap$ par rapport à $\cup$ et celle de $\cup$ par rapport à $\cap$ en utilisant les fonctions indicatrices.

10 Produit cartésien

Définition 11 *Soient E et F deux ensembles. Le* **produit cartésien de** E **et de** F *est l'ensemble des couples (x, y) où x est un élément de E et y est un élément de F. On le note $E \times F$.*

Autrement dit :

$$E \times F = \{(x, y) \,|\, x \in E,\, y \in F\}.$$

Exemple : Si $E = \{a, b, c\}$ et $F = \{0, 1\}$, alors $E \times F = \{(a, 0), (a, 1), (b, 0), (b, 1), (c, 0), (c, 1)\}$.

Remarques :

1) $E \times F$ se lit « E croix F ».

2) Le produit cartésien $E \times E$ est noté E^2. C'est l'ensemble des couples d'élements de E :

$$E^2 = \{(x, y) \mid x, y \in E\}.$$

Définition 12 *Soient $E_1, E_2, \ldots, E_n$ des ensembles. Le* **produit cartésien de** $E_1, E_2, \ldots, E_n$ *est l'ensemble des éléments de la forme $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ où, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, x_i est un élément de E_i. On le note $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ ou $\prod_{i=1}^{n} E_i$.*

Un élément de la forme $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est appelé n**-uplet**.

Remarque : Le produit cartésien $E \times E \times \ldots \times E$ est noté E^n :

$$E^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}, x_i \in E\}.$$

II Notions sur les applications

1 Définition

Définition 13 *Soient E et F deux ensembles. Une* **application** f **de** E **dans** F *est la donnée d'une partie G de $E \times F$ telle que, pour tout x de E, il existe un unique y dans F tel que le couple (x, y) appartienne à G. Ce y est alors appelé* **image de** x **par** f *et noté $f(x)$, et x est* **un antécédent de** y **par** f.

En clair, cela signifie qu'une application associe à chaque élément de E un et un seul élément de F.

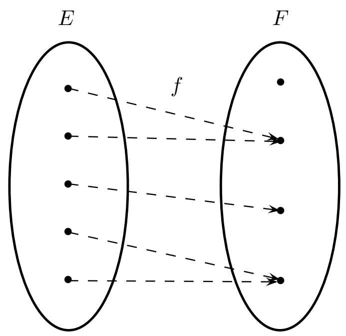
Pour désigner une application de E dans F on utilise la notation $f : E \to F$. E est **l'ensemble de départ** (ou **ensemble de définition**) de f, F est son **ensemble d'arrivée**.

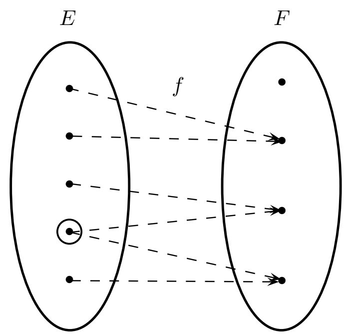
L'ensemble $G = \{(x, f(x)) \mid x \in E\}$ est appelé le **graphe de** f.

On note $\mathcal{F}(E, F)$ ou F^E l'ensemble des applications de E dans F.

Remarque : Égalité de deux applications :

$$f = g \Leftrightarrow \forall\, x \in E,\ f(x) = g(x).$$





La figure de gauche représente une application f entre les ensembles E et F, mais pas la figure de droite car l'un des éléments de E a deux images.

Exemples :

– $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: à chaque réel x elle associe le réel x^2.

– $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = n!$ est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$: à chaque entier naturel n elle associe l'entier naturel $n!$.

– On a vu au chapitre 2 des exemples d'applications du plan dans lui-même : les translations, les rotations, les réflexions, les homothéties, qui, à un point du plan, associent un autre point du plan.

– Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$. Soit $\varphi : E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(f) = \int_0^1 f(x)dx$. C'est une application de E dans $\mathbb{R}$: à une fonction elle associe un réel.

– Si $f : E \to F$ est une application et A un sous-ensemble de E, on appelle **restriction de** f **à** A l'application $f_{|A} : A \to F$ définie par $f_{|A}(x) = f(x)$.

– Soient E et I deux ensembles. Une **famille d'éléments de** E **indexée par** I est une application de I dans E. Une telle famille $x : I \to E$ est notée $(x_i)_{i\in I}$ où $x_i = x(i)$. En particulier, une famille d'éléments de E indexée par $\mathbb{N}$ est appelée **suite** d'éléments de E.

2 Image directe, image réciproque

Définition 14 *Soit $f : E \to F$ une application. Soit A un sous-ensemble de E.* **L'image directe de** A **par** f *est le sous-ensemble de F formé des images par f des éléments de A. On le note $f(A)$.*

Autrement dit :

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

Exemple : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Alors $f([1,2]) = [1,4]$, $f([-1,3]) = [0,9]$, etc.

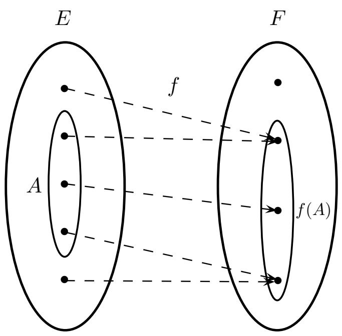
Définition 15 *Soit $f : E \to F$ une application. Soit B un sous-ensemble de F.* **L'image réciproque de** B **par** f *est le sous-ensemble de E formé des antécédents par f des éléments de B. On le note $f^{-1}(B)$.*

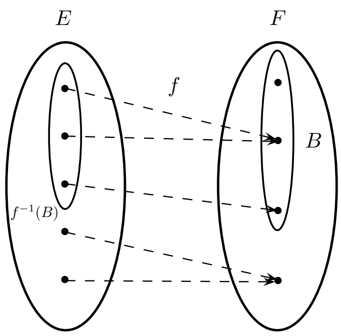
Autrement dit :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$

Exemple : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Alors $f^{-1}([0,4]) = [-2,2]$, $f^{-1}([1,+\infty[) =]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$, etc.

Remarque : Ne pas confondre cette notation avec celle de la fonction réciproque d'une bijection : $f^{-1}(B)$ a un sens même si f n'est pas bijective (mais si f est bijective l'image directe de B par f^{-1} coïncide avec l'image réciproque de B par f).





Exercice 4

1) Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{array}$. Déterminer $f(\mathbb{R})$, $f^{-1}(\{5\})$ et $f^{-1}(\mathbb{N})$.

2) Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & \lfloor x \rfloor \end{array}$. Déterminer $f([0,5])$, $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}(\mathbb{N})$.

3) Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ (p,q) & \mapsto & p^2+q^2 \end{array}$. Déterminer $f(\{0,1,2\}^2)$, $f^{-1}(\{25\})$ et $f^{-1}(\{0,\dots,10\})$.

3 Composée de deux applications

Définition 16 *Soient E, F, G trois ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications. La* **composée de** f **et de** g *est l'application de E dans G notée $g \circ f$ et définie par :*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & F \arrow[r, "g"] & G \\ x \arrow[r, mapsto] & f(x) \arrow[r, mapsto] & g(f(x)) \end{tikzcd}$$

Exemple : Soient f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x + 1$ et $g(x) = 2x + 1$.
Alors $(g \circ f)(x) = 2(x^2 + x + 1) + 1 = 2x^2 + 2x + 3$ et $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (2x + 1)^2 + (2x + 1) + 1 = 4x^2 + 6x + 3$.

La composition n'est donc pas commutative. En revanche elle est associative :

Proposition 7 *Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ des applications. Alors $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.*

Démonstration :

Soit $x \in E$. Alors $((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))$ et $(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))$. Les applications $(h \circ g) \circ f$ et $h \circ (g \circ f)$ sont donc égales. □

4 Application identité

Définition 17 *Soit E un ensemble.* **L'application identique** *ou* **identité de** *E est l'application de E dans E notée Id_E définie par :*

$$\mathrm{Id}_E(x) = x.$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté sur E, on la note simplement Id.

Proposition 8 *Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \to F$ une application. Alors $f \circ \mathrm{Id}_E = f$ et $\mathrm{Id}_F \circ f = f$.*

Démonstration : Immédiat. □

5 Applications injectives, surjectives, bijectives

• Injectivité, surjectivité, bijectivité

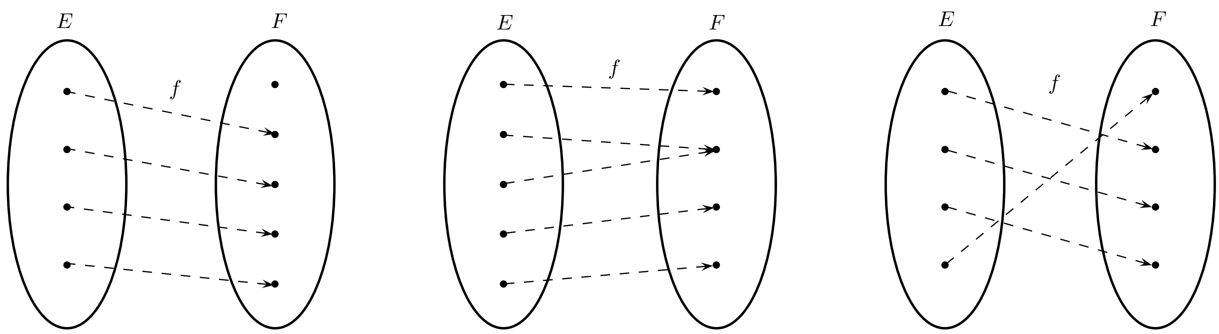
Définition 18 *Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \to F$ une application.*

(i) On dit que f est **injective** *si tout élément de F a au plus un antécédent par f.*

(ii) On dit que f est **surjective** *si tout élément de F a au moins un antécédent par f.*

(iii) On dit que f est **bijective** *si tout élément de F a exactement un antécédent par f.*

≪ Au plus un ≫ signifie zéro ou un.



La première figure représente une application injective mais non surjective. La deuxième représente une application surjective mais non injective. La troisième représente une application bijective.

Remarques :

1) Avec des quantificateurs :

(i) f est injective si et seulement si : $\forall (x, y) \in E^2$, $(x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$, ou encore, par contraposée, si et seulement si : $\forall (x, y) \in E^2$, $(f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$.

(ii) f est surjective si et seulement si : $\forall y \in F$, $\exists x \in E$, $y = f(x)$.

(iii) f est bijective si et seulement si : $\forall y \in F$, $\exists !\, x \in E$, $y = f(x)$.

2) En pratique, pour montrer que $f : E \to F$ est injective, on suppose qu'il existe $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$, et on montre qu'alors $x = y$.

3) f est surjective si et seulement si $f(E) = F$.

4) f est bijective si et seulement si elle est injective et surjective.

Exercice 5 Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ définie par $f(z) = |z|$.

2) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = n + 1$ et $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ définie par $g(n) = n + 1$.

3) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = n^2$, $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ définie par $g(n) = n^2$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = x^2$, $k : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $k(z) = z^2$.

4) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + y, x - y)$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + y, xy)$.

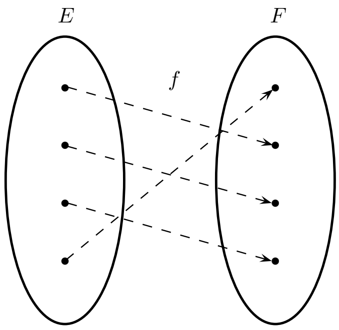
5) La projection orthogonale sur un plan P de l'espace, la réflexion par rapport à P.

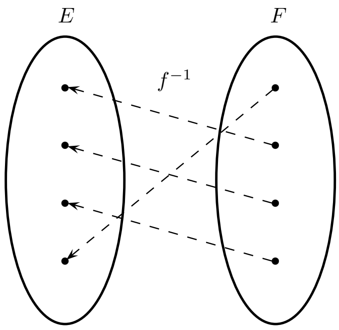
• Application réciproque d'une bijection

Définition 19 *Soit f une bijection de E dans F. Pour tout $y \in F$ on note $f^{-1}(y)$ l'unique antécédent de y par f. On définit ainsi une application $f^{-1} : F \to E$ appelée* **application réciproque de** f.

Pour tout $x \in I$ et pour tout $y \in J$, on a donc :

$$x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x).$$





Proposition 9 *Une application $f : E \to F$ est bijective si et seulement s'il existe une application $g : F \to E$ telle que* $\begin{cases} f \circ g = \mathrm{Id}_F \\ g \circ f = \mathrm{Id}_E \end{cases}$. *De plus, si g existe, alors $g = f^{-1}$.*

Démonstration :

($\Rightarrow$) Supposons f bijective. On va montrer que $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$ et que $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$.

Soit $y \in F$. Alors $f^{-1}(y)$ est un antécédent de y par f, donc $f(f^{-1}(y)) = y$. On a donc $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$.

Soit $x \in E$. Par définition, $f^{-1}(f(x))$ est l'unique antécédent de $f(x)$ par f : c'est x. On a donc $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$.

($\Leftarrow$) Supposons qu'il existe une application $g : F \to E$ telle que $\begin{cases} f \circ g = \mathrm{Id}_F \\ g \circ f = \mathrm{Id}_E \end{cases}$. On va montrer que f est injective et surjective.

Montrons que f est injective. Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Alors $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Or $g \circ f = \mathrm{Id}_E$, donc $x_1 = x_2$.

Montrons maintenant que f est surjective. Soit $y \in F$. Posons $x = g(y)$. Alors $f(x) = f(g(y)) = y$ puisque $f \circ g = \mathrm{Id}_F$. x est donc un antécédent de y par f.

De plus, si $y \in F$, on a vu que $g(y)$ est un antécédent de y par f, donc en fait $g(y) = f^{-1}(y)$: l'application g n'est autre que f^{-1}. $\square$

Exercice 6 Soient les applications $f : \mathbb{R} \to]-1, 1[$ et $g :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ définies par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$ et $g(x) = \ln \dfrac{1 + x}{1 - x}$. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$. Que peut-on en déduire ?

• Composée de deux injections, de deux surjections, de deux bijections

Proposition 10 *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.*

(i) Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ aussi.

(ii) Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ aussi.

(iii) Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ aussi, et sa réciproque est $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démonstration :

(i) Supposons f et g injectives. Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$. Alors $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Or g est injective, donc $f(x_1) = f(x_2)$. Mais f est également injective donc $x_1 = x_2$. Ainsi $g \circ f$ est bien injective.

(ii) Supposons f et g surjectives. Soit $z \in G$. Puisque g est surjective, il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$. De même, puisque f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On a donc $z = g(f(x)) = g \circ f(x)$: $g \circ f$ est bien surjective.

(iii) On a $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ \mathrm{Id}_F \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \mathrm{Id}_G$ et $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ \mathrm{Id}_F \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$, donc, par la proposition précédente, $g \circ f$ est bijective et sa réciproque est $f^{-1} \circ g^{-1}$. $\square$