Correction du DNS 7

EXERCICE 1

On pose $X = e^{2x}$. L'équation devient $X^3 - X^2 - 9X + 9 = 0$.

On voit que 1 est solution de cette équation, donc il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $X^3 - X^2 - 9X + 9 = (X-1)(aX^2 + bX + c)$.

En développant et en identifiant les coefficients des deux polynômes on obtient le système $\begin{cases} a = 1 \\ b - a = -1 \\ c - b = -9 \\ -c = 9 \end{cases}$, d'où on tire facilement $\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -9 \end{cases}$.

Ainsi $X^3 - X^2 - 9X + 9 = (X-1)(X^2 - 9) = (X-1)(X+3)(X-3)$, donc les solutions de l'équation $X^3 - X^2 - 9X + 9 = 0$ sont 1, 3 et -3.

Or $e^{2x} = 1 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $e^{2x} = 3 \Leftrightarrow 2x = \ln 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln 3}{2}$, et $e^{2x} = -3$ est impossible.

Conclusion : les solutions de l'équation $e^{6x} - e^{4x} - 9e^{2x} + 9 = 0$ sont 0 et $\dfrac{\ln 3}{2}$.

EXERCICE 2

1) a) Module de z' :

$$|z'| = \left|\frac{z-i}{z-1}\right| = \frac{|z-i|}{|z-1|} = \frac{|x+iy-i|}{|x+iy-1|} = \frac{|x+i(y-1)|}{|(x-1)+iy|} = \frac{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} = \sqrt{\frac{x^2+(y-1)^2}{(x-1)^2+y^2}}.$$

Forme algébrique de z' :

$$z' = \frac{x+iy-i}{x+iy-1} = \frac{x+i(y-1)}{(x-1)+iy} = \frac{[x+i(y-1)][(x-1)-iy]}{(x-1)^2+y^2} = \frac{x(x-1)+y(y-1)+i(-x-y+1)}{(x-1)^2+y^2}.$$

La partie réelle de z' est donc $\dfrac{x(x-1)+y(y-1)}{(x-1)^2+y^2}$ et sa partie imaginaire $\dfrac{-x-y+1}{(x-1)^2+y^2}$.

b) (i) On a :

$$|z'| = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2+(y-1)^2}{(x-1)^2+y^2} \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2 = (x-1)^2+y^2 \Leftrightarrow x^2+y^2-2y+1 = x^2-2x+1+y^2 \Leftrightarrow y = x.$$

L'ensemble E_1 est donc la droite d'équation $y = x$.

(ii) On a :

$$z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z') = 0 \Leftrightarrow -x-y+1 = 0 \Leftrightarrow y = -x+1.$$

L'ensemble E_2 est donc la droite d'équation $y = -x+1$, mais privée du point d'affixe 1 (car on doit avoir $z \neq 1$).

2) a) On a $z' = \dfrac{z_M - z_B}{z_M - z_A}$ donc $|z'| = \dfrac{|z_M - z_B|}{|z_M - z_A|} = \dfrac{BM}{AM}$ et $\arg z' = \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right)$ modulo 2π.

b) (i) On a :

$$|z'| = 1 \Leftrightarrow \frac{BM}{AM} = 1 \Leftrightarrow AM = BM.$$

L'ensemble E_1 est donc l'ensemble des points situés à égale distance des points A et B, c'est-à-dire la médiatrice du segment $[AB]$.

(ii) On a :

$$z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg z' = 0 \bmod \pi \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right) = 0 \bmod \pi,$$

ce qui est le cas si et seulement si les points A, B et M sont alignés. L'ensemble E_2 est donc la droite (AB) privée du point A.

a) On a

$$z' = \frac{z-i}{z-1} = \frac{e^{i\theta} - e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\theta} - 1} = \frac{e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} - e^{i\left(-\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)} = e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{2i\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{2i\sin\frac{\theta}{2}} = e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

Or
$$e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$
et
$$\sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\theta}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2} - \cos\frac{\theta}{2}\right),$$
donc
$$z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\left(\sin\frac{\theta}{2} - \cos\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{1+i}{2}\left(1 - \cot\frac{\theta}{2}\right).$$

b) Si M appartient au cercle de centre O et de rayon 1, alors $|z| = 1$, donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$. D'après le a), on a alors $z' = \frac{1+i}{2}\left(1 - \cot\frac{\theta}{2}\right)$, donc $\mathrm{Re}(z') = \mathrm{Im}(z') = \frac{1}{2}\left(1 - \cot\frac{\theta}{2}\right)$. Le point M' appartient donc à la droite d'équation $y = x$.

EXERCICE 3

1) a) La fonction Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ donc les fonctions $x \mapsto \operatorname{Arcsin}\sqrt{x}$ et $x \mapsto \operatorname{Arcsin}\sqrt{1-x}$ sont dérivables sur $]0,1[$ et donc f également. Pour tout $x \in]0,1[$ on a
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x}^2}} - \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}\frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{1-x}^2}} = \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}.$$

b) Pour tout $x \in]0,1[$ on a $f'(x) > 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur $[0,1]$. On a également $f(0) = -\dfrac{\pi}{2}$ et $f(1) = \dfrac{\pi}{2}$.

2) La fonction $g : x \mapsto \operatorname{Arcsin}(2x-1)$ est définie sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$ (si $0 < x < 1$ alors $-1 < 2x-1 < 1$) et pour tout $x \in]0,1[$ on a
$$g'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-(4x^2-4x+1)}} = \frac{2}{\sqrt{4x-4x^2}} = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} = f'(x)$$
donc il existe une constante c telle que $f(x) = g(x) + c$ pour tout $x \in]0,1[$. De plus $f(1/2) = g(1/2) = 0$ donc $c = 0$ et donc $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in]0,1[$, égalité vraie aussi pour $x = 0$ et $x = 1$ par continuité (ou en calculant les valeurs).

Autre méthode : pour tout $x \in [0,1]$ on a
$$\begin{aligned}
\sin(f(x)) &= \sin\left(\operatorname{Arcsin}\sqrt{x} - \operatorname{Arcsin}\sqrt{1-x}\right)\\
&= \sin\left(\operatorname{Arcsin}\sqrt{x}\right)\cos\left(\operatorname{Arcsin}\sqrt{1-x}\right) - \sin\left(\operatorname{Arcsin}\sqrt{1-x}\right)\cos\left(\operatorname{Arcsin}\sqrt{x}\right)\\
&= \sqrt{x}\sqrt{1-\sqrt{1-x}^2} - \sqrt{1-x}\sqrt{1-\sqrt{x}^2}\\
&= x-(1-x)\\
&= 2x-1
\end{aligned}$$
et $f(x) \in]-\pi/2,\pi/2[$ d'après l'étude de f donc $f(x) = \operatorname{Arcsin}(2x-1)$.

3) La fonction Arcsin est bijective donc :
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Arcsin}(2x-1) = 0 \Leftrightarrow 2x-1 = 0 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$
La courbe $\mathcal{C}$ rencontre donc l'axe des abscisses au point de coordonnées $(1/2,0)$. Une équation de la tangente en ce point est $y = f'(1/2)(x-1/2) + f(1/2)$ soit $y = 2x-1$.

4) La fonction f est deux fois dérivable sur $]0,1[$ et pour tout $x \in]0,1[$
$$f''(x) = -\frac{\frac{1-2x}{2\sqrt{x(1-x)}}}{x(1-x)} = \frac{2x-1}{2x(1-x)\sqrt{x(1-x)}}$$
qui est du signe de $2x-1$. La fonction f est donc concave sur $[0,1/2]$ et convexe sur $[1/2,1]$. Le point A est un point d'inflexion.

5) La fonction Arcsin est bijective donc :
$$f(x) = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \operatorname{Arcsin}(2x-1) = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 2x-1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}.$$