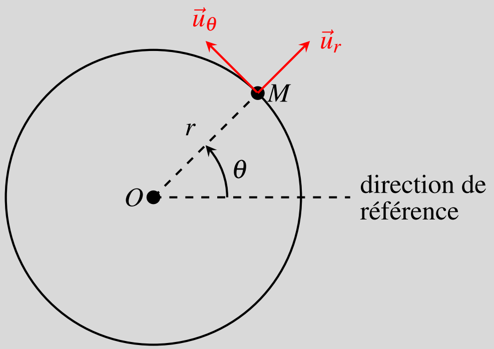
Corrigé Test 21-11

1. On retient les points suivants :

> Pour étudier un mouvement circulaire :
>
> - on utilise le système de **coordonnées polaires** et on place l'origine du repère **au centre de la trajectoire** ;
> - Pour un point M donné :
>   - la coordonnée r est la distance entre M et l'origine du repère ;
>   - la coordonnée θ est l'angle entre la direction de M et une direction de référence que l'on peut choisir arbitrairement ;
>   - le vecteur unitaire radial $\vec{u}_r$ s'éloigne de O ;
>   - le vecteur unitaire orthoradial $\vec{u}_\theta$ est orthogonal à $\vec{u}_r$ et orienté dans le sens de l'angle θ croissant.
>
> 
>

On écrit le vecteur position (à savoir **absolument**) :

$$\boxed{\vec{r} = r\vec{u}_r}$$

D'après l'énoncé la trajectoire est circulaire donc **la coordonnée r est constante**. On s'en souviendra au moment de dériver le vecteur position pour obtenir le vecteur vitesse.

Rappel : il faut **absolument mémoriser** les dérivées des vecteurs polaires :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{u}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\vec{u}_r}$$

On dérive donc le vecteur position :

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}(r\vec{u}_r)}{\mathrm{d}t} \\
&= r\frac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t} \quad (\text{car } r = \text{Cste}) \\
&= r\dot{\theta}\vec{u}_\theta
\end{aligned}$$

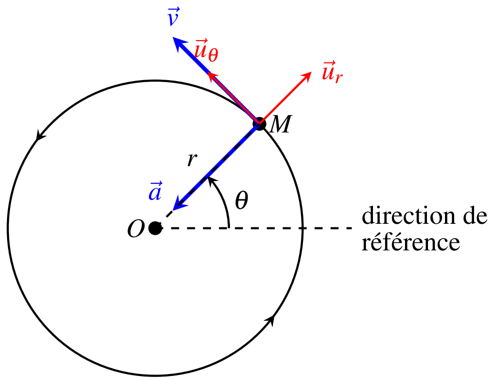
On conclut que $\boxed{\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta}$. On montre maintenant que **pour un mouvement circulaire et uniforme la vitesse angulaire est constante** :

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{r^2\dot{\theta}^2} = r\left|\dot{\theta}\right| \implies \left|\dot{\theta}\right| = \frac{\|\vec{v}\|}{r} = \text{Cste}$$

On dérive maintenant le vecteur vitesse :

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}(r\dot{\theta}\vec{u}_\theta)}{\mathrm{d}t} \\
&= r\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\vec{u}_\theta}{\mathrm{d}t} \quad (\text{car } r = \text{Cste et } \dot{\theta} = \text{Cste}) \\
&= r\dot{\theta}\left(-\dot{\theta}\vec{u}_r\right) \\
&= -r\dot{\theta}^2\vec{u}_r
\end{aligned}$$

On conclut que $\boxed{\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\vec{u}_r}$. On trace ces vecteurs sur le schéma ci-dessous. L'accélération est **centripète**.



Pour l'exercice d'application sur le mouvement rectiligne, il y a une chose simple et facile à retenir : **oubliez vos méthodes du lycée,** regardez ce que j'écris en cours/TD et **suivez ma manière de faire**.

2. Pour que les notations soient claires on note $(\vec{r}_1, \vec{v}_1, \vec{a}_1)$ les vecteurs cinématiques de la formule 1 et $(\vec{r}_0, \vec{v}_0, \vec{a}_0)$ ceux de la voiture. Comme le mouvement est 1D et repéré avec un axe cartésien (Ox) on projette les vecteurs cinématiques de la manière suivante :

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = x_1 \vec{u}_x \\ \vec{v}_1 = \dot{x}_1 \vec{u}_x \\ \vec{a}_1 = \ddot{x}_1 \vec{u}_x \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vec{r}_0 = x_0 \vec{u}_x \\ \vec{v}_0 = \dot{x}_0 \vec{u}_x \\ \vec{a}_0 = \ddot{x}_0 \vec{u}_x \end{cases}$$

D'après l'énoncé la voiture roule à la vitesse constante v_0. On conclut que :

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = v_0 \\ \Longrightarrow x_0 = v_0 t + C_1 \end{cases}$$

D'après l'énoncé $x_0(0) = 0$ donc $C_1 = 0$. On conclut que $\boxed{x_0(t) = v_0 t}$.

D'après l'énoncé la formule 1 avance avec une accélération constante a_1. On conclut que :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = a_1 \\ \Longrightarrow \dot{x}_1 = a_1 t + C_2 \\ \Longrightarrow x_1 = \frac{1}{2} a_1 t^2 + C_2 t + C_3 \end{cases}$$

On écrit deux conditions initiales pour la formule 1 : $\dot{x}_1(0) = 0$ (la formule 1 commence sa course à l'arrêt) et $x_1(0) = 0$. On en déduit que $C_2 = 0$ et $C_3 = 0$ et on conclut que $\dot{x}_1(t) = a_1 t$ et $\boxed{x_1(t) = \dfrac{1}{2} a_1 t^2}$.

3. D'après l'énoncé la formule 1 atteint la vitesse $\dot{x}_1 = 100\,\text{km/h} = 27{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ à la date $t = 2{,}5\,\text{s}$. En utilisant le résultat de la question précédente on trouve :

$$\dot{x}_1 = a_1 t \Longrightarrow \boxed{a_1 = \frac{\dot{x}_1}{t} = 11{,}1\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}}$$

4. La course est terminée pour la voiture (resp. la formule 1) lorsque $x_0 = L$ (resp. $x_1 = L$). On calcule la durée T_0 de la course pour la voiture et T_1 pour la formule 1. Attention, il faut également penser à convertir la vitesse de la voiture en unités SI :

$$x_0(T_0) = v_0 T_0 = L \Longrightarrow T_0 = \frac{L}{v_0} = 12\,\text{s}$$

$$x_1(T_1) = \frac{1}{2} a_1 T_1^2 = L \Longrightarrow T_1 = \sqrt{\frac{2L}{a_1}} = 9{,}5\,\text{s}$$

On constate que $T_1 < T_0$ donc **la formule 1 remporte la course**.

5. On cherche à quelle date les positions de la voiture et de la formule 1 sont identiques :

$$x_0 = x_1 \Longleftrightarrow v_0 t = \frac{1}{2} a_1 t^2 \Longleftrightarrow \boxed{t = \frac{2v_0}{a_1} = 7{,}5\,\text{s}}$$

La formule 1 met 7,5 secondes pour rattraper la voiture. Elles se trouvent alors dans la position :

$$\boxed{x_0\left(\frac{2v_0}{a_1}\right) = x_1\left(\frac{2v_0}{a_1}\right) = \frac{2v_0^2}{a_1} = 313\,\text{m}}$$

Enfin n'oubliez pas, **lire un corrigé ne suffit pas pour comprendre**. Essayez de refaire les applications du cours et/ou les exercices du TD et/ou ceux de la fiche méthode. Vous pourrez considérer qu'un point est acquis **si vous avez réussi à faire seul.e un exercice, sans aucune aide**.