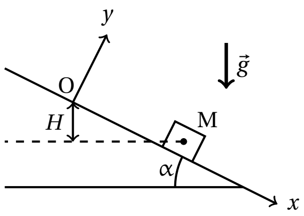
## ⋆ Exercice 1 : Chute libre

Deux masses ponctuelles $m$, lâchées sans vitesse initiale, chutent d'une hauteur $H$ dans le champ de pesanteur. La première chute à la verticale et la seconde glisse sur un plan incliné d'un angle $\alpha$ par rapport à l'horizontale. Dans les deux cas, on néglige tout frottement.

Exprimer la vitesse finale et la durée du mouvement pour chacune des deux masses. Conclure.

## ⋆ Exercice 2 : Solide sur un plan incliné

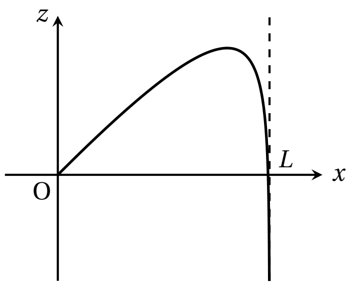
Un solide de masse $m$ est posé sur un plan incliné d'un angle $\alpha$ par rapport à l'horizontale. On note $f$ le coefficient de frottement entre le solide et le plan. On suppose que le référentiel lié au plan est galiléen.




1. Quelle doit être la valeur minimale de $\alpha$ pour que le solide quitte son état de repos et glisse sur le plan incliné ?
2. Cette condition étant réalisée, le solide est lâché à $t = 0$, sans vitesse initiale, du point O. Calculer $x(t)$, abscisse sur le plan incliné. Quelle est sa vitesse $v_M$ en un point M situé à une altitude $H$ sous le point O ? Etudier le cas $f = 0$.

## ⋆ Exercice 3 : Portée d'un tir avec frottement fluide

On lance dans l'air un projectile de masse $m$ depuis l'origine d'un repère (O$xz$) avec une vitesse initiale $\vec{V}_0$ faisant un angle $\beta$ avec l'horizontale. En plus de son poids, le projectile est soumis aux frottements de l'air dont on modélisera l'action par une force de frottement du type $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$ où $\vec{v} = v_x\vec{u}_x + v_z\vec{u}_z$ est la vitesse du projectile.




1. En utilisant le PFD, établir les équations différentielles vérifiées par $v_x(t)$ et $v_z(t)$.
2. Montrer que la trajectoire du projectile tend vers une asymptote verticale d'équation $x = L$ et calculer $L$ en fonction de $m$, $V_0$, $\alpha$ et $\beta$.

## ⋆ Exercice 4 : Masse posée sur un support oscillant

Une masse $M$ est posée sur un plateau horizontal qui oscille verticalement. L'altitude du plateau est $Z_p(t) = Z_m \cos(2\pi f t)$ où $f$ est la fréquence des oscillations et $Z_m$ leur amplitude.

L'amplitude $Z_m$ étant fixée, à partir de quelle fréquence la masse va-t-elle quitter le plateau ? En quel point de la trajectoire du plateau cela va-t-il se produire ?

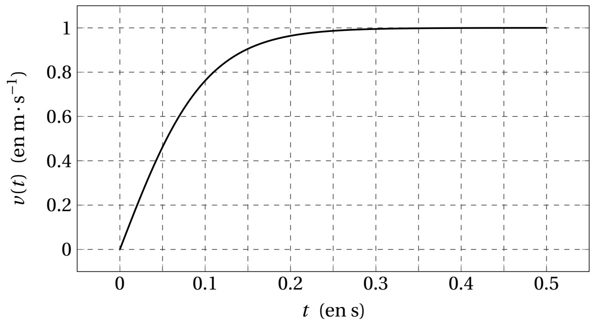
## ⋆⋆ Exercice 5 : Chute dans un fluide visqueux

Une masse ponctuelle $m$ se déplace dans un fluide visqueux. Elle est soumise à une force de frottement fluide $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$. À l'instant initial, on la lance verticalement avec une vitesse $v_0$ depuis l'origine d'un axe (O$z$) ascendant.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse $v(t)$ de la masse.
2. Exprimer l'altitude $z(t)$ de la masse à tout instant. On posera $\tau = \dfrac{m}{\alpha}$.
3. On note $t_c$ la date à laquelle la masse repasse par sa position initiale et $\beta = t_c/\tau$. Montrer que $\beta$ est solution de :
$$1 - e^{-\beta} = \frac{g\tau}{v_0 + g\tau}\beta$$
4. AN : $g = 10\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$ , $v_0 = 20\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ , $m = 100\,\mathrm{g}$ , $\alpha = 5{,}0 \times 10^{-2}\,\mathrm{kg \cdot s^{-1}}$. Déterminer numériquement (à la calculatrice) la valeur de $t_c$ non triviale.

## ⋆⋆ Exercice 6 : Chute dans un fluide visqueux (bis)

Un point matériel M de masse $m = 500\,\mathrm{g}$ est plongé dans un fluide visqueux. Il est lâché sans vitesse initiale. La masse est soumise à son poids et à une force de frottement fluide du type $\vec{F} = -\alpha\,\|\vec{v}\|\,\vec{v}$ où $\vec{v}$ est la vitesse de M dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On représente ci-dessous l'allure de la vitesse $v(t) = \|\vec{v}(t)\|$ mesurée au cours de l'expérience. On prendra $g = 10\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

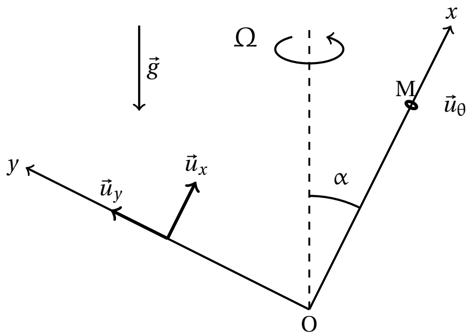



1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la vitesse.
2. Exprimer la vitesse limite $v_\ell$ atteinte par la masse au bout d'un temps très long.
3. Pour déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire, on peut par exemple définir ce temps $\tau$ comme la date où la tangente à l'origine intersecte l'asymptote. Exprimer $\tau$ en fonction de $m$, $\alpha$ et $g$ .
4. À l'aide de la courbe ci-dessus, calculer le coefficient de frottement fluide $\alpha$.
5. Résoudre l'équation de la question 1 en utilisant la méthode de séparation des variables et exprimer $v(t)$ à tout instant. On donnera le résultat en fonction de $v_\ell$ et $\tau$.

*Donnée* : $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{argth}\left(\frac{x}{a}\right)$

## ★★ Exercice 7 : Équilibre relatif

Un anneau ponctuel de masse $m$ peut se déplacer sans frottement le long d'un axe $(\mathrm{O}x)$ incliné d'un angle $\alpha$ par rapport à la verticale. La tige est en rotation uniforme autour de l'axe vertical passant par le point O, à la vitesse angulaire constante $\Omega$. On cherche à savoir s'il existe une ou plusieurs positions d'équilibre relatif pour l'anneau, c'est-à-dire une position d'équilibre dans le référentiel lié à la tige.



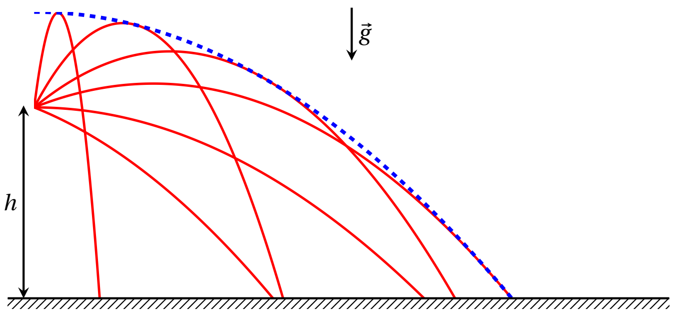

Dans toutes les questions qui suivent, on suppose que l'anneau **reste à une altitude constante** au cours du mouvement. Le mouvement de la masse est repéré dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ représentée sur la figure ci-dessus.

1. Décrire le mouvement de l'anneau dans le référentiel terrestre. Exprimer son vecteur vitesse $\vec{v}$ et son vecteur accélération $\vec{a}$ dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ en fonction de son abscisse $x$, $\alpha$ et $\Omega$.
2. En vous appuyant sur le principe fondamental de la dynamique, projeté sur l'axe $\mathrm{O}x$, montrer qu'il existe une unique position d'équilibre relatif $x_{\mathrm{eq}}$ que l'on exprimera en fonction de $g$, $\Omega$ et $\alpha$. Déterminer numériquement $x_{\mathrm{eq}}$.

   *Données* : $\alpha = 20\,°$, $g = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $\Omega = 5$ tours/s.

## ★★★ Exercice 8 : Courbe de sécurité

On considère un objet lancé avec une vitesse $\vec{v}_0$ faisant un angle $\alpha$ avec l'horizontale, d'une hauteur $h$ au-dessus du sol.




1. Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire.
2. Déterminer la flèche de l'objet, c'est-à-dire l'altitude du point le plus haut atteint.
3. Établir l'équation cartésienne de la courbe délimitant les points accessibles des points non accessibles par un tir à $v_0$ fixé mais d'angle $\alpha$ variable. *En dessous de cette courbe, un point peut éventuellement être atteint. Au dessus de cette courbe c'est impossible, le lieu est en sécurité, d'où le nom donné à cette courbe.*

## Solutions :

**Ex1** : $v_f = \sqrt{2gH}$ dans les deux cas
$t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$ pour la chute verticale, $t = \frac{1}{\sin\alpha} \times \sqrt{\frac{2H}{g}}$ pour la chute sur le plan incliné

**Ex2** 1. $\tan\alpha = f$ 2. $x(t) = \frac{1}{2}gt^2\left(\sin\alpha - f\cos\alpha\right)$ $v(\mathrm{M}) = \sqrt{2gH\left(1 - \frac{f}{\tan\alpha}\right)}$

**Ex3** : 1. $\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} + \frac{\alpha}{m}v_x = 0$ ; $\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} + \frac{\alpha}{m}v_z = -g$

2. $L = \frac{mV_0}{\alpha}\cos\beta$

**Ex4** : $f > \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{Z_m}}$ ; $Z = Z_m$

**Ex5** 1. $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\alpha}{m}v = -g$ 2. $z(t) = -g\tau t + \tau\left(v_0 + g\tau\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$ 4. $t_c = 3{,}2\,\mathrm{s}$

**Ex6** : 1. $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\alpha}{m}v^2 = g$ (axe $\mathrm{O}z$ descendant) 2. $v_\ell = \sqrt{\frac{mg}{\alpha}}$ 3. $\tau = \sqrt{\frac{m}{\alpha g}}$ 4. $\alpha = 5\,\mathrm{kg\cdot m^{-1}}$

5. $v(t) = v_\ell \,\mathrm{th}\left(\frac{t}{\tau}\right)$

**Ex7** : 1. $\vec{v} = x\sin\alpha\Omega\vec{u}_\theta$ $\vec{a} = -x\sin\alpha\Omega^2\vec{u}_r$ 2. $x_{\mathrm{eq}} = \frac{g\cos\alpha}{\Omega^2\sin^2\alpha} = 8{,}0\,\mathrm{cm}$

**Ex8** : 3. $z_{\mathrm{sec}}(x) = -\frac{g}{2v_0^2}x^2 + h + \frac{v_0^2}{2g}$