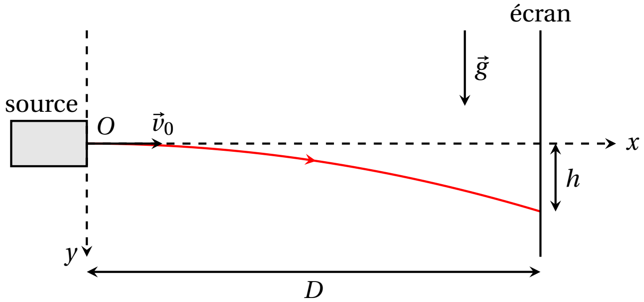
TD8 : Dynamique - corrigé

Application 1

1. En l'absence de frottements la particule suit une trajectoire parabolique, représentée ci-dessous. On utilise un repère cartésien (Oxy).



On applique le principe fondamental de la dynamique à la particule, soumise uniquement à son poids $\vec{P}$, dans le référentiel terrestre supposé galiléen : $m\vec{a} = \vec{P} \iff \vec{a} = \vec{g}$. On projette cette équation dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$:

$$\ddot{x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \ddot{y} = g$$

On intègre deux fois, avec les conditions initiales $\dot{x}(0) = v_0$, $x(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$ et $y(0) = 0$ pour obtenir les équations horaires du mouvement :

$$x(t) = v_0 t \qquad \text{et} \qquad y(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

La particule atteint l'écran $(x = D)$ à la date $t = D/v_0$ et la déviation verticale vaut $\boxed{h = \frac{gD^2}{2v_0^2}}$.

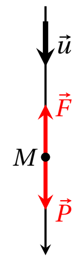
2. La déviation verticale est minimale quand la vitesse initiale et maximale, et vice-versa. Numériquement on trouve comme valeurs extrêmes $h_{\min} = 0{,}068\,\text{mm}$ et $h_{\max} = 0{,}63\,\text{mm}$. La hauteur de la trace laissée par l'impact des particules sur l'écran vaut $\boxed{h_{\max} - h_{\min} = 0{,}56\,\text{mm}}$.

Application 2

1. La dimension d'une force est $[F] = \text{MLT}^{-2}$. La dimension du coefficient de frottement fluide β est :

$$[\beta] = \frac{[F]}{[v]^2} = \frac{\text{MLT}^{-2}}{(\text{LT}^{-1})^2} \iff \boxed{[\beta] = \text{ML}^{-1}}$$

Le coefficient de frottement β s'exprime en $\boxed{\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}}$.



2. La bille est soumise à son poids $\vec{P}$ et à la force de frottement fluide $\vec{F}$. On applique le principe fondamental de la dynamique à la bille dans le référentiel terrestre supposé galiléen : $m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{P} + \vec{F}$. On projette cette équation sur $\vec{u}$:

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - \beta v^2 \iff \boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\beta}{m}v^2 = g}$$

3. En régime permanent la vitesse est constante donc $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$: $\boxed{v_\infty = \sqrt{\frac{mg}{\beta}}}$.

4. On écrit l'équation différentielle en séparant les variables v et t :

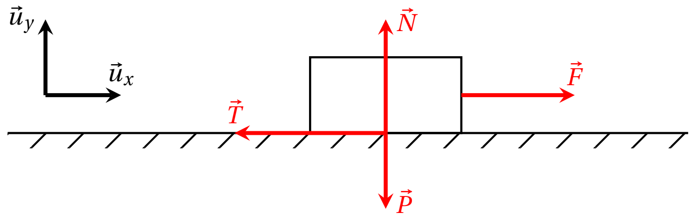
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\beta}{m}\left(v_\infty^2 - v^2\right) \iff \frac{\mathrm{d}v}{v_\infty^2 - v^2} = \frac{\beta}{m}\mathrm{d}t$$

On intègre entre le point de départ $(v = 0,\ t = 0)$ et un point quelconque (v, t) :

$$\int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{v_\infty^2 - v^2} = \int_0^t \frac{\beta}{m}\mathrm{d}t \iff \frac{1}{v_\infty}\operatorname{argth}\left(\frac{v}{v_\infty}\right) = \frac{\beta}{m}t \iff v(t) = v_\infty \operatorname{th}\left(\frac{\beta v_\infty}{m}t\right)$$

La vitesse s'écrit $\boxed{v(t) = v_\infty \operatorname{th}\left(\frac{t}{\tau}\right)}$ avec un temps caractéristique $\boxed{\tau = \frac{m}{\beta v_\infty} = \sqrt{\frac{m}{\beta g}}}$.

Application 3



On étudie l'adhérence de la caisse sur le sol. On se place dans une base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$. La caisse est soumise à son poids $\vec{P}$, à la réaction normale $\vec{N}$ et tangentielle $\vec{T}$ du sol ainsi qu'à la force de traction $\vec{F}$ exercée par la corde. On applique le principe fondamental de la statique à la caisse en équilibre dans le référentiel terrestre supposé galiléen : $\vec{P} + \vec{T} + \vec{N} + \vec{F} = \vec{0}$. On projette dans la base d'étude :

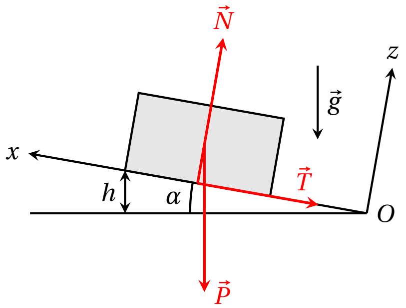
$$\begin{vmatrix} 0 \\ -mg \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\|\vec{T}\| \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ \|\vec{N}\| \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \iff \begin{cases} \|\vec{T}\| = F \\ \|\vec{N}\| = mg \end{cases}$$

D'après la première loi de Coulomb l'adhérence est maintenue tant que :

$$\|\vec{T}\| < f\|\vec{N}\| \iff F < fmg$$

La force de traction minimale qui permet de faire glisser la caisse est $\boxed{F_{\min} = fmg = 735\,\text{N}}$.

Application 4



1. Le solide est soumis à son poids $\vec{P}$ et à la réaction normale $\vec{N}$ et tangentielle $\vec{T}$ du plan incliné. On étudie son mouvement de glissement en appliquant le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel terrestre supposé galiléen : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{N}$. On le projette dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_z)$:

$$\begin{vmatrix} m\ddot{x} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -mg\sin\alpha \\ -mg\cos\alpha \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\|\vec{T}\| \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ \|\vec{N}\| \end{vmatrix} \iff \begin{cases} \ddot{x} = -g\sin\alpha - \dfrac{\|\vec{T}\|}{m} \\ \|\vec{N}\| = mg\cos\alpha \end{cases}$$

Puisqu'il y a glissement on applique la deuxième loi de Coulomb : $\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\| = fmg\cos\alpha$. On en déduit l'équation du mouvement : $\ddot{x} = -(\sin\alpha + f\cos\alpha)g$. On l'intègre avec les conditions initiales $\dot{x}(0) = v_0$ et $x(0) = 0$, et l'on obtient :

$$\dot{x}(t) = -(\sin\alpha + f\cos\alpha)gt + v_0 \qquad \text{et} \qquad \boxed{x(t) = -\frac{1}{2}(\sin\alpha + f\cos\alpha)gt^2 + v_0 t}$$

2. Le solide s'arrête lorsque $\dot{x} = 0$, à la date $t = \frac{v_0}{g(\sin\alpha + f\cos\alpha)}$, dans la position $x = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + f\cos\alpha)}$. L'altitude du solide est donnée par :

$$\sin\alpha = \frac{h}{x} \iff \boxed{h = x\sin\alpha = \frac{v_0^2}{2g(1 + f\mathrm{cotan}\alpha)}}$$

3. On effectue une étude similaire à celle de la question 1, à la différence que la réaction tangentielle est désormais dirigée selon $+\vec{u}_x$ car le mouvement de glissement du solide est descendant. On a toujours $\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\| = fmg\cos\alpha$ et la projection du PFD sur $\vec{u}_x$ conduit à $\ddot{x} = (-\sin\alpha + f\cos\alpha)g$. On change d'origine des temps ($t = 0$ à l'instant où le solide commence son glissement vers le bas) et on intègre avec les conditions initiales $\dot{x}(0) = 0$ et $x(0) = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + f\cos\alpha)}$, ce qui donne :

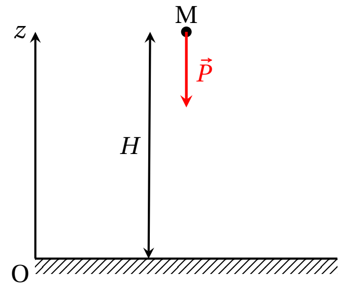
$$\dot{x}(t) = (-\sin\alpha + f\cos\alpha)gt \qquad \text{et} \qquad x(t) = \frac{1}{2}(-\sin\alpha + f\cos\alpha)gt^2 + \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + f\cos\alpha)}$$

Les solide retourne à son point de départ ($x = 0$) à la date $t = \frac{v_0}{g\sqrt{(\sin\alpha - f\cos\alpha)(\sin\alpha + f\cos\alpha)}}$. Sa vitesse est alors égale à :

$$\boxed{v_0' = |\dot{x}| = v_0\sqrt{\frac{\sin\alpha - f\cos\alpha}{\sin\alpha + f\cos\alpha}}}$$

On constate que $v_0' < v_0$. Le solide repasse par sa position initiale avec une vitesse plus faible qu'au départ.

⋆ Exercice 1 : Chute libre



<u>Premier cas : chute verticale</u>

On applique le PFD à la masse dans le référentiel terrestre supposé galiléen. En l'absence de frottement, la masse n'est soumise qu'à son poids.

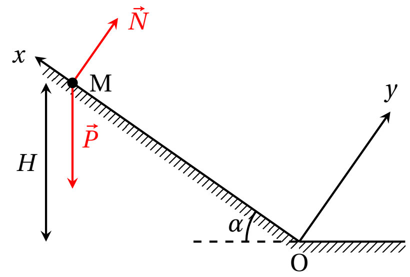
$$m\vec{a} = \vec{P} = m\vec{g} \iff \vec{a} = -g\vec{u}_z \underset{\text{sur }(Oz)}{\iff} \ddot{z} = -g$$

On intègre deux fois cette équation, avec les conditions initiales $\dot{z}(0) = 0$ et $z(0) = H$, pour obtenir la vitesse et la position de la masse à tout instant :

$$\dot{z}(t) = -gt \quad \text{et} \quad z(t) = H - \tfrac{1}{2}gt^2$$

La masse atteint le sol lorsque $z = 0$, à la date $\boxed{t = \sqrt{\frac{2H}{g}}}$. À ce moment-là, $\boxed{v = |\dot{z}| = \sqrt{2gH}}$.

<u>Deuxième cas : chute sur un plan incliné</u>



On applique le PFD à la masse dans le référentiel terrestre supposé galiléen. En l'absence de frottement, la masse n'est soumise qu'à son poids et à la réaction normale du plan incliné :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N}$$

On projette le PFD sur l'axe (Ox) :

$$m\ddot{x} = -mg\sin\alpha \iff \ddot{x} = -g\sin\alpha$$

On intègre deux fois cette équation, avec les conditions initiales $\dot{x}(0) = 0$ et $x(0) = \frac{H}{\sin\alpha}$, pour obtenir la vitesse et la position de la masse à tout instant :

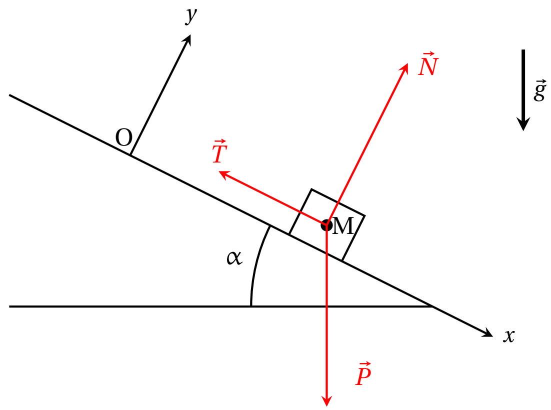
$$\dot{x}(t) = -g\sin\alpha\, t \quad \text{et} \quad x(t) = \frac{H}{\sin\alpha} - \tfrac{1}{2}g\sin\alpha\, t^2$$

La masse atteint le sol lorsque $x = 0$, à la date $\boxed{t = \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{2H}{g}}}$. À ce moment-là, $\boxed{v = |\dot{z}| = \sqrt{2gH}}$.

En conclusion, **la vitesse qu'un objet acquiert à la suite d'une chute de hauteur donnée, sans frottement, dans le champ de pesanteur, est indépendante du chemin suivi au cours de la chute.** Nous démontrerons ce résultat et le généraliserons dans le prochain chapitre sur l'énergétique.

TD8 : Dynamique - corrigé

⋆ Exercice 2 : Solide sur un plan incliné



1. Démonstration de cours (**à savoir refaire seul!**) : Le solide quitte son état de repos si $\boxed{\alpha > \arctan f}$.

2. On applique le PFD au solide dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Il est soumis à son poids et aux réactions normale et tangentielle du plan incliné :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{T}$$

On projette le PFD sur (Ox) et (Oy) :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = mg\sin\alpha - \|\vec{T}\| & (1) \\ 0 = -mg\cos\alpha + \|\vec{N}\| & (2) \end{cases}$$

On note qu'ici $\ddot{y} = 0$ car le mouvement reste rectiligne le long de l'axe (Ox) (pas de mouvement selon (Oy)).

L'équation (2) permet de déterminer la réaction normale du plan : $\|\vec{N}\| = mg\cos\alpha$.

Le solide glisse sur le plan incliné. On peut appliquer la deuxième loi de Coulomb :

$$\|\vec{T}\| = f\,\|\vec{N}\| \iff \|\vec{T}\| = f\,mg\cos\alpha$$

On injecte cette expression dans l'équation (1) : $\ddot{x} = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)$. On intègre deux fois cette équation, avec les conditions initiales $\dot{x}(0) = 0$ et $x(0) = 0$, pour obtenir la vitesse et la position du solide à tout instant :

$$\dot{x}(t) = gt(\sin\alpha - f\cos\alpha) \quad \text{et} \quad \boxed{x(t) = \frac{1}{2}gt^2(\sin\alpha - f\cos\alpha)}$$

Le solide a chuté d'une altitude H lorsque $x = \frac{H}{\sin\alpha}$. Cela se produit à la date $t = \sqrt{\frac{2H}{g\sin\alpha(\sin\alpha - f\cos\alpha)}}$.

À ce moment-là, $\boxed{v = \dot{x} = \sqrt{2gH(1 - f\,\text{cotan}\alpha)}}$.

⋆ Exercice 3 : Portée d'un tir avec frottement fluide

1. On applique le PFD au projectile dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Il est soumis à son poids et à son poids et à la force de frottement fluide :

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{P} + \vec{F} = m\vec{g} - \alpha\vec{v}$$

On projette le PFD sur (Ox) et (Oz) :

$$\begin{cases} m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -\alpha v_x \iff \boxed{\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} + \frac{\alpha}{m}v_x = 0} & (1) \\ m\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = -mg - \alpha v_z \iff \boxed{\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} + \frac{\alpha}{m}v_z = -g} & (2) \end{cases}$$

2. On peut réécrire l'équation (1) sous la forme canonique : $\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} + \frac{v_x}{\tau} = 0$ avec $\tau = \frac{m}{\alpha}$ est la constante de temps du régime transitoire. On intègre une première fois l'équation (1), avec la condition initiale $v_x(0) = \dot{x}(0) = V_0\cos\beta$ pour obtenir la composante horizontale de la vitesse à tout instant :

$$v_x(t) = V_0\cos\beta\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

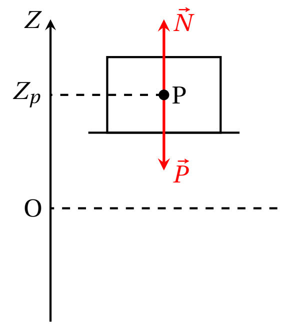
On intègre une deuxième fois, avec la condition initiale $x(0) = 0$ pour obtenir la composante horizontale de la position à tout instant :

$$x(t) = V_0\tau\cos\beta(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau})$$

Quand $t \longrightarrow \infty$, $x \longrightarrow V_0\tau\cos\beta = \frac{mV_0\cos\beta}{\alpha}$.

Le mouvement tend vers une asymptote verticale d'équation $\boxed{x = \frac{mV_0\cos\beta}{\alpha}}$.

⋆ Exercice 4 : Masse posée sur un support oscillant



On applique le PFD à la masse, dans le référentiel terrestre supposé galiléen, projeté sur (OZ). La masse est soumise à son poids et à la réaction normale du support :

$$M\ddot{Z}_p = -Mg + \|\vec{N}\|$$

Connaissant $Z_p(t)$, on peut déterminer l'accélération du plateau : $\ddot{Z}_p(t) = -(2\pi f)^2 Z_m\cos(2\pi f t)$. On en déduit l'expression de la réaction :

$$\|\vec{N}\|(t) = M\big(g - (2\pi f)^2 Z_m\cos(2\pi f t)\big)$$

Au cours du temps le terme $\cos(2\pi f t)$ oscille entre -1 et 1 donc la fonction $\|\vec{N}\|(t)$ oscille entre $M\big(g - (2\pi f)^2 Z_m\big)$ et $M\big(g + (2\pi f)^2 Z_m\big)$. Or la norme de la réaction n'a de sens que si elle est **positive**. La masse quitte le plateau **si la réaction vient à s'annuler au cours d'une oscillation**. Cela se produit nécessairement si le minimum de cette fonction est négatif, c'est-à-dire si :

$$(2\pi f)^2 Z_m > g \iff \boxed{f > \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{Z_m}}}$$

Cela se produit à l'endroit où $\|\vec{N}\|(t)$ est minimale, c'est-à-dire lorsque $\cos(2\pi f t) = 1$. La position est alors $Z_p = Z_m$ (sommet de la trajectoire).

⋆⋆ Exercice 5 : Chute dans un fluide visqueux

1. On applique le PFD à la masse dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Elle est soumise à son poids et à la force de frottement fluide :

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{P} + \vec{F} = m\vec{g} - \alpha\vec{v}$$

On projette le PFD sur (Oz) :

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -mg - \alpha v \iff \boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\alpha}{m}v = -g}$$

2. On intègre une première fois, avec la condition initiale $v(0) = v_0$, pour obtenir la vitesse :

$$v(t) = (v_0 + g\tau)\mathrm{e}^{-t/\tau} - g\tau$$

On intègre une deuxième fois, avec la condition initiale $z(0) = 0$, pour obtenir la position :

$$\boxed{z(t) = \tau(v_0 + g\tau)(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}) - g\tau t}$$

3. On cherche à résoudre l'équation $z(t) = 0$. En remplaçant t_c par $\beta\tau$, on obtient :

$$0 = \tau(v_0 + g\tau)(1 - \mathrm{e}^{-\beta}) - g\beta\tau^2 \iff \boxed{1 - \mathrm{e}^{-\beta} = \frac{g\tau}{v_0 + g\tau}\beta}$$

4. On ne peut pas donner d'expression littérale à la solution non nulle de cette équation. Seule une résolution numérique à la calculatrice est possible. On trouve :

$$\beta = 1{,}6 \iff \boxed{t_c = 3{,}2\,\mathrm{s}}$$

⋆⋆ Exercice 6 : Chute dans un fluide visqueux (bis)

1. On applique le PFD à la masse dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Elle est soumise à son poids et à la force de frottement fluide :

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{P} + \vec{F} = m\vec{g} - \alpha\|\vec{v}\|\,\vec{v}$$

On projette le PFD sur un axe(Oz) **descendant**. On écrit $\vec{v} = v\vec{u}_z$ avec $v > 0$ car la masse tombe :

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - \alpha v^2 \iff \boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\alpha}{m}v^2 = g}$$

2. On détermine la vitesse limite en cherchant la solution particulière de l'équation ci-dessus : $\boxed{v_\ell = \sqrt{\frac{mg}{\alpha}}}$.

3. L'asymptote a pour équation $v = v_\ell = \sqrt{\frac{mg}{\alpha}}$. La tangente à l'origine a pour équation $v = \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)_0 t = gt$. On a déterminé $\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)_0$ en utilisant l'équation différentielle, sachant que $v(0) = 0$.

L'intersection entre l'asymptote et la tangente à l'origine a lieu à la date τ telle que :

$$\sqrt{\frac{mg}{\alpha}} = g\tau \iff \boxed{\tau = \sqrt{\frac{m}{g\alpha}}}$$

4. La lecture de la courbe nous permet de déterminer la constante de temps : $\tau = 0{,}1\,\mathrm{s}$. On en déduit la valeur du coefficient de frottement fluide : $\boxed{\alpha = \frac{m}{g\tau^2} = 5\,\mathrm{kg\cdot m^{-1}}}$.

5. On transforme l'expression de l'équation du mouvement, en utilisant entre autres $g = \frac{v_\ell}{\tau}$:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \frac{\alpha}{m}v^2 = g\left(1 - \frac{v^2}{v_\ell^2}\right) \iff \frac{\mathrm{d}v}{v_\ell^2 - v^2} = \frac{g}{v_\ell^2}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t}{\tau v_\ell}$$

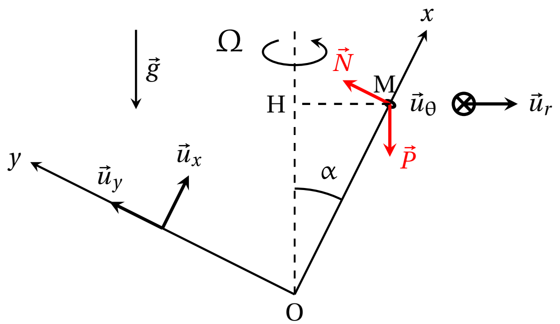
On intègre cette équation différentielle entre l'instant initial ($v = 0, t = 0$) et un instant quelconque (v, t) :

$$\int_0^v \frac{\mathrm{d}v'}{v_\ell^2 - v'} = \int_0^t \frac{g}{v_\ell^2}\mathrm{d}t' \iff \frac{1}{v_\ell}\operatorname{argth}\left(\frac{v}{v_\ell}\right) = \frac{t}{\tau v_\ell}$$

On inverse cette relation pour isoler v, ce qui aboutit au résultat suivant :

$$\boxed{v = v_\ell \operatorname{th}\left(\frac{t}{\tau}\right)}$$

⋆⋆ Exercice 7 : Équilibre relatif



1. Dans le référentiel terrestre, l'anneau a un mouvement circulaire et uniforme, de rayon $r = \mathrm{HM} = x\sin\alpha$ et de vitesse angulaire $\dot\theta = \Omega$. Dans la base cylindrique, on exprime les vecteurs vitesse et accélération :

$$\boxed{\vec v = x\sin\alpha\Omega\vec u_\theta} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec a = -x\sin\alpha\Omega^2\vec u_r}$$

2. On applique le PFD à la masse dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Elle est soumise à son poids et à la réaction normale de la tige :

$$m\vec a = \vec P + \vec N$$

On souhaite projetter le PFD sur (Ox). L'accélération de l'anneau s'écrit :

$$\vec a = -x\sin\alpha\Omega^2\vec u_r = -x\sin\alpha\Omega^2\left(\sin\alpha\vec u_x - \cos\alpha\vec u_y\right)$$

Le poids vaut $\vec P = mg\left(-\cos\alpha\vec u_x - \sin\alpha\vec u_y\right)$. La réaction normale n'a pas de composante sur $\vec u_x$ puisqu'elle est perpendiculaire à l'axe (Ox). Par conséquent, la projection du PFD sur $\vec u_x$ aboutit à :

$$-mx_{\text{eq}}\sin^2\alpha\Omega^2 = -mg\cos\alpha \iff \boxed{x_{\text{eq}} = \frac{g\cos\alpha}{\Omega^2\sin^2\alpha}}$$

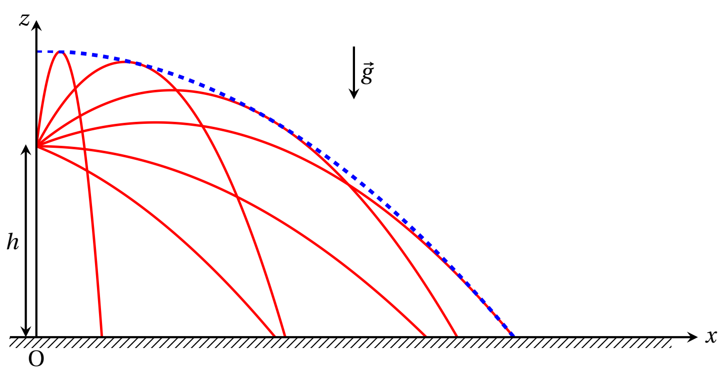
On effectue l'application numérique : $\boxed{x_{\text{eq}} = 8{,}0\,\text{cm}}$.

Remarque : Comme le support de l'anneau n'est pas plan mais rectiligne, il existe une infinité de directions possibles orthogonales à cet axe. Par conséquent, il est impossible de déterminer immédiatement la direction exacte de $\vec N$. Tout ce que l'on peut dire, c'est que cette réaction n'a pas de composante selon $\vec u_x$, mais elle peut en avoir selon $\vec u_y$ ou selon $\vec u_\theta$. On écrira alors :

$$\vec N = N_y\vec u_y + N_\theta\vec u_\theta$$

où N_y et N_θ sont deux inconnues, que l'on pourrait déterminer en projettant le PFD sur $\vec u_y$ et $\vec u_\theta$. D'ailleurs, vous pourriez démontrer que la projection sur $\vec u_\theta$ aboutit à $N_\theta = 0$, ce qui permet de conclure que la réaction normale est selon $\vec u_y$ et justifie l'orientation du vecteur $\vec N$ représenté sur le schéma.

★★★ Exercice 8 : Courbe de sécurité



1. On applique le PFD à la masse dans le référentiel terrestre supposé galiléen, que l'on projette sur (Ox) et (Oz) :

$$\begin{cases}\ddot x = 0\\ \ddot z = -g\end{cases}$$

On intègre deux fois ces équations différentielles, avec les conditions initiales $\dot x(0) = v_0\cos\alpha$, $x(0) = 0$, $\dot z(0) = v_0\sin\alpha$ et $z(0) = h$, pour obtenir la vitesse et la position de la masse à tout instant :

$$\begin{cases}\dot x = v_0\cos\alpha\\ \dot z = -gt + v_0\sin\alpha\end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases}\boxed{x = v_0 t\cos\alpha}\\ \boxed{z = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0 t\sin\alpha + h}\end{cases}$$

À partir de ce système d'équations paramétriques, on peut écrire l'équation cartésienne de la trajectoire (voir méthode vue en cours) :

$$z = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + \tan\alpha x + h \iff \boxed{z = -\frac{g}{2v_0^2}\left(1+\tan^2\alpha\right)x^2 + \tan\alpha x + h}$$

2. Pour un angle α donné, l'altitude maximale est atteinte lorsque $\dot z = 0$, à la date $t = \frac{v_0\sin\alpha}{g}$.

L'altitude correspondante vaut $\boxed{z_{\max} = h + \dfrac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}}$.

3. Pour déterminer l'équation cartésienne de la courbe de sécurité, plaçons-nous à une abscisse x quelconque. Parmi toutes les trajectoires qui passent par l'abscisse x, celle qui correspond à la courbe de sécurité, à cette abscisse particulière, est celle pour laquelle z est maximale. Puisque chaque courbe correspond à une valeur différente de α, alors l'altitude de la courbe de sécurité en x, notée $z_{\text{sec}}(x)$, vérifie la relation suivante :

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\alpha} = 0$$

Le calcul donne : $-\frac{g}{v_0^2}\cdot\frac{\tan\alpha}{\cos^2\alpha}x^2 + \frac{x}{\cos^2\alpha} = 0 \iff \tan\alpha = \frac{v_0^2}{gx}$.

En réinjectant cette expression dans celle de $z(x)$, on obtient l'équation de la courbe de sécurité :

$$\boxed{z_{\text{sec}}(x) = -\frac{g}{2v_0^2}x^2 + \frac{v_0^2}{2g} + h}$$