Corrigé DM8

Exercice : Escalier en colimaçon

1. Quand on effectue un tour complet dans l'escalier en montant, l'angle θ augmente de 2π. Le dénivelé correspondant est défini par :

$$\boxed{h = z(\theta + 2\pi) - z(\theta) = 2\pi K = 2{,}5\,\mathrm{m}}$$

2. On exprime le vecteur position de la personne dans la base cylindrique : $\vec{r} = b\vec{u}_r + z\vec{u}_z$. On dérive pour avoir le vecteur vitesse (sachant que b est constant) : $\vec{v} = b\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$. À partir des équations paramétriques de l'escalier on trouve par dérivation que $\dot{z} = K\dot{\theta} \implies \dot{\theta} = \dot{z}/K$. On conclut que :

$$\vec{v} = \frac{b}{K}\dot{z}\vec{u}_r + \dot{z}\vec{u}_z = \dot{z}\left(\frac{b}{K}\vec{u}_r + \vec{u}_z\right) \iff \boxed{v = \|\vec{v}\| = \dot{z}\sqrt{\frac{b^2}{K^2} + 1}}$$

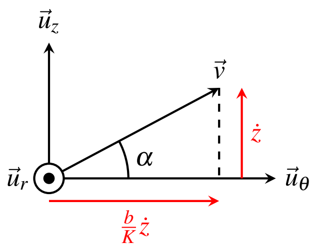
D'après l'énoncé la personne avance à vitesse constante en norme. Puisque v, b et K sont constantes alors $\dot{z}$ **l'est également**.

3. La vitesse ascensionnelle est constante donc pour la calculer il suffit d'écrire, entre le bas et le haut de l'escalier : $\dot{z} = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{H}{T}$. On en déduit que

$$\boxed{v = \frac{H}{T}\sqrt{\frac{b^2}{K^2} + 1} = 0{,}60\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$$

4. On représente schématiquement le vecteur vitesse dans la base $(\vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$, ainsi que l'angle α. On a vu à la question 2 que le vecteur vitesse s'écrit : $\vec{v} = \frac{b}{K}\dot{z}\vec{u}_r + \dot{z}\vec{u}_z$. On indique les coordonnées sur le schéma et, à l'aide d'une relation de trigonométrie, on écrit :

$$\tan\alpha = \frac{\dot{z}}{\frac{b}{K}\dot{z}} = \frac{K}{b} \iff \boxed{\alpha = \arctan\left(\frac{K}{b}\right) = 22^\circ}$$



5. La personne monte l'escalier en une durée T à la vitesse constante en norme v donc la distance parcourue vaut :

$$\boxed{L = vT = H\sqrt{1 + \frac{b^2}{h^2}} = 40\,\mathrm{m}}$$

Corrigé DM8

Exercice : Escalier en colimaçon

1. Quand on effectue un tour complet dans l'escalier en montant, l'angle θ augmente de 2π. Le dénivelé correspondant est défini par :

$$\boxed{h = z(\theta + 2\pi) - z(\theta) = 2\pi K = 2{,}5\,\mathrm{m}}$$

2. On exprime le vecteur position de la personne dans la base cylindrique : $\vec{r} = b\vec{u}_r + z\vec{u}_z$. On dérive pour avoir le vecteur vitesse (sachant que b est constant) : $\vec{v} = b\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$. À partir des équations paramétriques de l'escalier on trouve par dérivation que $\dot{z} = K\dot{\theta} \implies \dot{\theta} = \dot{z}/K$. On conclut que :

$$\vec{v} = \frac{b}{K}\dot{z}\vec{u}_r + \dot{z}\vec{u}_z = \dot{z}\left(\frac{b}{K}\vec{u}_r + \vec{u}_z\right) \iff \boxed{v = \|\vec{v}\| = \dot{z}\sqrt{\frac{b^2}{K^2} + 1}}$$

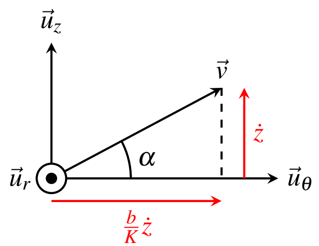
D'après l'énoncé la personne avance à vitesse constante en norme. Puisque v, b et K sont constantes alors $\dot{z}$ **l'est également**.

3. La vitesse ascensionnelle est constante donc pour la calculer il suffit d'écrire, entre le bas et le haut de l'escalier : $\dot{z} = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{H}{T}$. On en déduit que

$$\boxed{v = \frac{H}{T}\sqrt{\frac{b^2}{K^2} + 1} = 0{,}60\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$$

4. On représente schématiquement le vecteur vitesse dans la base $(\vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$, ainsi que l'angle α. On a vu à la question 2 que le vecteur vitesse s'écrit : $\vec{v} = \frac{b}{K}\dot{z}\vec{u}_r + \dot{z}\vec{u}_z$. On indique les coordonnées sur le schéma et, à l'aide d'une relation de trigonométrie, on écrit :

$$\tan\alpha = \frac{\dot{z}}{\frac{b}{K}\dot{z}} = \frac{K}{b} \iff \boxed{\alpha = \arctan\left(\frac{K}{b}\right) = 22^\circ}$$



5. La personne monte l'escalier en une durée T à la vitesse constante en norme v donc la distance parcourue vaut :

$$\boxed{L = vT = H\sqrt{1 + \frac{b^2}{h^2}} = 40\,\mathrm{m}}$$