Devoir n°10 (non surveillé)

EXERCICE 1

Résoudre sur $]-1,1[$ les équations différentielles suivantes :

1) $(1-x^2)y' - xy = x$,

2) $(1-x^2)y' - xy = \operatorname{Arcsin} x$,

3) $(1-x^2)y' - xy = x^3$ (chercher une solution polynomiale).

EXERCICE 2

1) Résoudre sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$(E_1)\ :\ x^3y' + x^2y = 1 + x.$$

2) On considère maintenant l'équation différentielle

$$(E_2)\ :\ x^2y'' - xy' + y = 1 + x,$$

que l'on étudie également sur I. On note (H) l'équation homogène associée à (E_2).

a) Déterminer un réel a tel que la fonction y_0 définie par $y_0(x) = x^a$ soit une solution de (H) sur I.

b) On pose $y = zy_0$ où z est une fonction deux fois dérivable sur I. Montrer que y est solution de (E_2) si et seulement si z' est solution de (E_1).

c) En déduire les solutions de (E_2).

EXERCICE 3

On considère l'équation différentielle

$$(E)\ :\ x^2y'' + xy' + y = 0,$$

dont on cherche les solutions définies sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$.

1) Soit y une fonction deux fois dérivable sur I. On considère la fonction z définie sur $\mathbb{R}$ par $z(t) = y(e^t)$: on a ainsi $y(x) = z(\ln x)$ pour tout $x \in I$.

a) Exprimer $y'(x)$ et $y''(x)$ à l'aide de z' et z''.

b) Montrer que y est solution de (E) sur I si et seulement si z est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants (E') que l'on précisera.

c) Résoudre (E') puis (E).

2) Déterminer l'unique solution de (E) satisfaisant aux conditions initiales $y(1) = 1$ et $y'(1) = 0$.