Correction du DNS 9

EXERCICE 1

1) On intègre par parties ($u(x) = \ln x$, $u'(x) = 1/x$, $v'(x) = 1/x^2$, $v(x) = -1/x$, u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$) :

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln 2}{2} - \left[\frac{1}{x}\right]_1^2 = \frac{1-\ln 2}{2}.$$

2) On effectue le changement de variable $y = \cos x$. Alors $dy = -\sin x\,dx$ et

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{(2+\cos x)(3+\cos x)}\,dx = -\int_1^0 \frac{dy}{(2+y)(3+y)} = \int_0^1 \frac{dy}{(2+y)(3+y)}.$$

On décompose en éléments simples :

$$\frac{1}{(2+y)(3+y)} = \frac{1}{2+y} - \frac{1}{3+y}$$

donc

$$\int_0^1 \frac{dy}{(2+y)(3+y)} = \int_0^1 \left(\frac{1}{2+y} - \frac{1}{3+y}\right) dy = [\ln(2+y) - \ln(3+y)]_0^1 = 2\ln 3 - 3\ln 2.$$

3) On fait apparaître une expression de la forme $u'u^{1/2}$ qui est la dérivée de $2/3 \times u^{3/2}$:

$$\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} 2x\left(x^2+1\right)^{1/2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}\left(x^2+1\right)^{3/2}\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{7}{3}.$$

4) On effectue le changement de variable $y = x^6$. Alors $dy = 6x^5\,dx$ et

$$\int_0^1 \frac{x^5}{1+x^{12}}\,dx = \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{6}\left[\operatorname{Arctan} y\right]_0^1 = \frac{\pi}{24}.$$

PROBLÈME

1) a) La fonction S_n est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel t,

$$S_n'(t) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k} = \sum_{k=0}^{n}(-t^2)^k = \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}$$

(somme des termes d'une suite géométrique).

b) On a donc, pour tout t, $S'n(t) = \dfrac{1}{1+t^2} - \dfrac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}$.

On intègre entre 0 et x :

$$\int_0^x S_n'(t)dt = S_n(x) - S_n(0) = S_n(x)$$

et

$$\int_0^x \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}\right) dt = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} - \int_0^x \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}dt = \operatorname{Arctan} x - \int_0^x \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}dt.$$

L'égalité demandée s'ensuit.

c) Pour tout $x \geqslant 0$, on a donc

$$|\operatorname{Arctan} x - S_n(x)| = \left|\int_0^x \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}dt\right| \leqslant \int_0^x \left|\frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}\right| dt = \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt.$$

Or pour tout t on a $\dfrac{1}{1+t^2} \leqslant 1$, donc $\dfrac{t^{2n+2}}{1+t^2} \leqslant t^{2n+2}$, d'où $\displaystyle\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt \leqslant \int_0^x t^{2n+2}dt = \frac{x^{2n+3}}{2n+3}$. Ainsi on a bien

$$|\operatorname{Arctan} x - S_n(x)| \leqslant \frac{x^{2n+3}}{2n+3}$$

pour tout réel positif x.

d) Pour tout $x \in [0,1]$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{2n+3}}{2n+3} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} |\operatorname{Arctan} x - S_n(x)| = 0$, d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \operatorname{Arctan} x$.

2) a) D'après la question précédente, $\lim_{n\to+\infty} S_n(1) = \text{Arctan}\, 1 = \frac{\pi}{4}$, donc $\lim_{n\to+\infty} 4S_n(1) = \pi$.

De plus, d'après 1)c), on a $|\,\text{Arctan}\, 1 - S_n(1)| \leqslant \frac{1}{2n+3}$ donc $|\pi - 4S_n(1)| \leqslant \frac{4}{2n+3}$.

b) Pour que $4S_n(1)$ soit une valeur approchée de π à 10^{-1} près, c'est-à-dire pour que $|\pi - 4S_n(1)| \leqslant 10^{-1}$, il suffit que l'on ait $\frac{4}{2n+3} \leqslant 10^{-1}$. Or $2 \times 19 + 3 = 41$ donc $n = 19$ convient (on a $4S_{19}(1) \approx 3,09$).

3) a) La formule d'addition pour la tangente donne

$$\tan\left(\text{Arctan}\,\frac{1}{2} + \text{Arctan}\,\frac{1}{3}\right) = \frac{\tan(\text{Arctan}\,\frac{1}{2}) + \tan(\text{Arctan}\,\frac{1}{3})}{1 - \tan(\text{Arctan}\,\frac{1}{2})\tan(\text{Arctan}\,\frac{1}{3})} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}} = 1 = \tan\frac{\pi}{4}.$$

De plus $0 < \frac{1}{2} < 1$ et $0 < \frac{1}{3} < 1$, donc $0 < \text{Arctan}\,\frac{1}{2} < \frac{\pi}{4}$ et $0 < \text{Arctan}\,\frac{1}{3} < \frac{\pi}{4}$ puisque la fonction Arctan est strictement croissante, d'où

$$0 < \text{Arctan}\,\frac{1}{2} + \text{Arctan}\,\frac{1}{3} < \frac{\pi}{2}.$$

Conclusion : On a $\tan\left(\text{Arctan}\,\frac{1}{2} + \text{Arctan}\,\frac{1}{3}\right) = \tan\frac{\pi}{4}$ et $\text{Arctan}\,\frac{1}{2} + \text{Arctan}\,\frac{1}{3} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, donc

$$\text{Arctan}\,\frac{1}{2} + \text{Arctan}\,\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$$

puisque tan est bijective sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

b) Si θ est un argument de $z = x + iy$, alors $\cos\theta = \frac{x}{\rho}$ et $\sin\theta = \frac{y}{\rho}$, où ρ est le module de $|z|$, et donc $\tan\theta = \frac{y}{x}$. Puisque $x > 0$, z a un unique argument compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$, qui ne peut donc être que $\text{Arctan}\,\frac{y}{x}$.

c) Un argument de $(2+i)(3+i)$ est $\text{Arctan}\,\frac{1}{2} + \text{Arctan}\,\frac{1}{3}$ d'après la question précédente. Or $(2+i)(3+i) = 5+5i = 5(1+i)$, et un argument de $5(1+i)$ est $\frac{\pi}{4}$.

Par conséquent, puisque $\text{Arctan}\,\frac{1}{2} + \text{Arctan}\,\frac{1}{3} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\text{Arctan}\,\frac{1}{2} + \text{Arctan}\,\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$.

d) D'après la question 1)d), on a $\lim_{n\to+\infty} S_n\left(\frac{1}{2}\right) = \text{Arctan}\,\frac{1}{2}$ et $\lim_{n\to+\infty} S_n\left(\frac{1}{3}\right) = \text{Arctan}\,\frac{1}{3}$. On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(S_n\left(\frac{1}{2}\right) + S_n\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \text{Arctan}\,\frac{1}{2} + \text{Arctan}\,\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$$

et donc que $\lim_{n\to+\infty} 4\left(S_n\left(\frac{1}{2}\right) + S_n\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \pi$.

e) D'après 1)c), on a $\left|\text{Arctan}\,\frac{1}{2} - S_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leqslant \frac{1}{(2n+3)2^{2n+3}}$ et $\left|\text{Arctan}\,\frac{1}{3} - S_n\left(\frac{1}{3}\right)\right| \leqslant \frac{1}{(2n+3)3^{2n+3}}$, d'où

$$\left|\text{Arctan}\,\frac{1}{2} - S_n\left(\frac{1}{2}\right) + \text{Arctan}\,\frac{1}{3} - S_n\left(\frac{1}{3}\right)\right| \leqslant \left|\text{Arctan}\,\frac{1}{2} - S_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| + \left|\text{Arctan}\,\frac{1}{3} - S_n\left(\frac{1}{3}\right)\right| \leqslant \frac{1}{2n+3}\left(\frac{1}{2^{2n+3}} + \frac{1}{3^{2n+3}}\right)$$

d'où le résultat demandé.

f) On trouve $T_4 \approx 3,141741197$ et, pour $n = 4$, $\frac{4}{2n+3}\left(\frac{1}{2^{2n+3}} + \frac{1}{3^{2n+3}}\right) \approx 0,0001796095561$. On peut ainsi affirmer que $\pi \approx 3,14174$ à 2.10^{-4} près.